Справедливые дележи общего дохода в кооперативных играх

д.ф.-м.н. М.М. Луценко, к.т.н. А.М. Дёмин
Петербургский государственный университет путей сообщений Императора Александра I
Санкт-Петербург, Россия
ml4116@mail.ru

Аннотация. **Рассмотрены принципы построения дележей (платежей) участниками одного проекта, если разные участники имеют разный экономический и административный вклад в общий проект. Строятся кооперативные игры, учитывающие разный статус игроков. Обсуждаются ядро и вектор Шепли как примеры «справедливых» дележей. Для игр с частично упорядоченным множеством игроков, в которых функция выигрыша согласована с этим порядком, приведены аналитические формулы расчета вектора Шепли. Для приведенных примеров конфликтных ситуаций обсуждается «справедливость» построенных дележей.**

Ключевые слова: **кооперативная игра, вектор Шепли, частичный порядок, справедливое распределение дохода, распределение долей платежей.**

Введение

Всякое успешное предприятие (проект) начинается с продуманной кооперации участников. При совместной прокладке (эксплуатации) компьютерных сетей возникают проблемы, связанные с распределением общего дохода (платежа) между участниками проекта. Кооперация устойчива тогда, когда все участники согласны с принципами распределения их общего дохода (платежа) и понимают, какие доходы (платежи) они получат (выполнят) в результате заключенного соглашения. Построением «справедливых» дележей занимается теория кооперативных игр [1–5].

В этих моделях каждая коалиция участников проекта может отказаться от него и переключиться на другой проект с доходом, заранее известным всем участникам общего проекта. Поэтому при обсуждении договора каждая коалиция участников может обоснованно угрожать выйти из общего соглашения, что существенно затрудняет нахождение общего компромисса. В теории кооперативных игр предлагается несколько приемлемых выходов из конфликтной ситуации. Один из них — совместное принятие правила распределения доходов, основанного на идеях «симметрии и аддитивности»: равные участники кооперации должны получать равные доли общего дохода, а при одновременном участии в нескольких проектах доходы участников складываются. Несмотря на универсальность этих идей, построенное на них правило распределения доходов может приводить к совершенно неожиданным результатам, особенно в тех случаях, когда участники имеют разный экономический или административный вес.

В работе будет рассмотрено два принципа построения «справедливых» дележей: с-ядро и вектор Шепли [1–5]. Несмотря на их популярность, выполнение конкретных расчетов оказывается технически трудным, так как мы должны учитывать значения функции, заданной на множестве всех подмножеств множества участников проекта. Сложность формул затрудняет внедрение принципов «справедливости» при построении конкретных дележей.

В последние годы были выделены некоторые классы кооперативных игр, в которых вектор Шепли имеет простую структуру [4, 6, 7]. Это кооперативные игры, построенные по иерархическим системам. В них доходы участников зависят не только от их возможностей, но и от управляющих воздействий «более значимых» игроков. Аналитический вид вектора Шепли способствует тому, что дележ, построенный для подобных моделей, будет принят всеми участниками проекта.

Успешное применение аналитических выражений при построении оптимальных решений в сложных иерархических системах на транспорте можно найти в работе [8].

Кооперативные игры и их решения

Для построения моделей справедливого распределения доходов сформулируем основные определения и необходимые утверждения кооперативной теории игр.

Определение 1. Кооперативная игра — упорядоченная пара $\Gamma = \langle N, v \rangle$, в которой $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество игроков, а v — характеристическая функция, заданная на множестве всех подмножеств множества игроков N. Характеристическая функция v каждой коалиции K (подмножества игроков, $K \subseteq N$) ставит в соответствие выигрыш, который игроки могли бы получить, создав эту коалицию.

Величину $v(K)$ часто интерпретируют как доход участников проекта, объединенных в коалицию K. В некоторых случаях значение характеристической функции $v(K)$ можно интерпретировать как платеж, который должна выполнить коалиция K, если она будет создана [1–5]. Подобная ситуация может возникнуть при совместном строительстве компьютерной сети.

Определим те условия, при которых все игроки объединятся в большую коалицию N. Такое объединение возможно, если игроки договорятся о том, как они поделят общий выигрыш (платеж) $v(N)$.

Под дележом кооперативной игры $\Gamma = \langle N, v \rangle$ мы понимаем упорядоченный набор чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, в котором компонента x_i — доля выигрыша (платежа), которую получит игрок i в соответствии с дележом x. Мы считаем, что все дележи коллективно рациональны, то есть сумма всех компонент каждого дележа равна $v(N)$.

Определение 2. *Ядром* классической кооперативной игры $\Gamma = \langle N, v \rangle$ называется множество дележей $C(v)$, для которых выполнены неравенства

$$x(K) = \sum_{i \in K} x_i \geq v(K) \text{ для всех } K \subset N .$$

Возможна следующая интерпретация введенного выше определения. Пусть коалиция K имеет возможность самостоятельно заключить на стороне контракт на сумму $v(K)$ (это число может равняться нулю). Допустим, что в результате предварительных переговоров предложен следующий дележ: компания с номером i получает величину x_i, причем $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$, $x_i \geq 0$. Если сумма величин x_i с номерами $i \in K$ (общая сумма, предлагаемая коалиции K) меньше величины $v(K)$, то компании, входящие в коалицию, откажутся от предложенного дележа на том основании, что у них есть более выгодное предложение. Таким образом, проблема состоит в нахождении вектора $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, описывающего дележ суммы контракта $v(N)$, удовлетворяющего все возможные коалиции, а ядро $C(v)$ — возможно пустое подмножество дележей, стабилизируемых простыми угрозами. Заметим, что все дележи в ядре индивидуально рациональны: $x_i \geq v(i)$ для всех $i \in N$.

Система неравенств, описывающая ядро, вместе с условием «коллективной рациональности» содержит $2^n - 1$ ограничений (столько же, сколько имеется в игре $\Gamma = \langle N, v \rangle$ непустых коалиций) и задает в n-мерном пространстве выпуклое замкнутое множество. Таким образом, множество дележей $C(v)$ определяется своими крайними точками в пространстве R^n.

В тех случаях, когда значение $v(K)$ характеристической функции интерпретируется как платеж коалиции K, определяют двойственное ядро $C^*(v)$ через систему противоположных неравенств [9]:

$$x(K) = \sum_{i \in K} x_i \leq v(K) \text{ для всех } K \subset N .$$

Двойственное ядро состоит из платежей, стабилизируемых простыми угрозами выхода из большой коалиции.

К недостаткам ядра следует отнести его возможное отсутствие, или оно может оказаться слишком обширным, тогда выбор реализуемого дележа из такого ядра может оказаться затруднительным.

Справедливые дележи

Множественность рассмотренного выше принципа решения кооперативной игры, а также жесткие условия существования ее ядра стимулируют попытки построения других принципов, применимых к каждой кооперативной игре. Одним из таких принципов является нормативный принцип распределения общего дохода (платежа) между участниками кооперативной игры. Для его применения необходимо, чтобы все игроки согласились на его применение до начала игры. Последовательное проведение принципов: равным игрокам равный выигрыш, выигрыши участников нескольких игр складываются, получает больше тот, кто больше вносит в коалицию, – приводит к дележу, «справедливому» по Шепли, или вектору Шепли.

Итак, под решением кооперативной игры мы понимаем функцию, ставящую в соответствие каждой кооперативной игре $\Gamma = \langle N, v \rangle$ из некоторого класса игр G вектор $Sh(v) = (Sh_1, Sh_2, \dots, Sh_n)$, обладающий «разумными», с точки зрения всех игроков, свойствами. Компоненты вектора Шепли мы будем интерпретировать как полезности, получаемые игроками в результате соглашения или решения арбитра. Мы считаем, что наши соображения о справедливом дележе воплощены в следующих четырех аксиомах, впервые в несколько иной форме сформулированными Шепли в 1953 г. [10, 11].

Определение 3. Вектором Шепли называется отображение Sh, которое каждой кооперативной игре $\Gamma = \langle N, v \rangle$ с n игроков ставит в соответствие вектор $Sh(v) = (Sh_1, Sh_2, \dots, Sh_n)$, обладающий следующими свойствами.

1. *Аксиома болвана.* Если игрок i таков, что для любой коалиции $K \subseteq N$ выполняется равенство $v(K \cup \{i\}) = v(K)$, то соответствующая компонента вектора Шепли равна нулю, то есть $Sh_i(v) = 0$.

Итак, если игрок i ничего не вносит ни в какую коалицию, то его доля от общего выигрыша равна нулю.

2. *Аксиома эффективности.* Сумма компонент вектора Шепли равна общему выигрышу всех игроков:

$$\sum_{i \in N} Sh_i(v) = v(N) .$$

Таким образом, игроки делят между собой их общий доход (платеж).

3. *Аксиома симметрии.* Если игроки входят в игру одинаково, то соответствующие компоненты вектора Шепли равны.

4. *Аксиома агрегации (аддитивности).* Если характеристическая функция игры $\Gamma = \langle N, v \rangle$ равна сумме характеристических функций игр $\langle N, v_1 \rangle$ и $\langle N, v_2 \rangle$, то есть $v = v_1 + v_2$, то вектор суммы равен сумме векторов: $Sh(v_1 + v_2) = Sh(v_1) + Sh(v_2)$.

Эта аксиома утверждает, что выигрыш игрока, участвующего в двух играх одновременно, складывается из выигрышей в этих играх.

Теорема 1 (теорема Шепли о существовании справедливого дележа [10–11]). Существует, и притом только одно, отображение множества характеристических функций игр n лиц во множестве дележей, обладающее четырьмя перечисленными выше аксиомами, причем компоненты этого отображения можно найти по формуле:

$$Sh_i(v) = \sum_{K \subseteq I} \frac{(n-k-1)!k!}{n!}\big(v(K \cup \{i\}) - v(K)\big),$$

$$k = |K|;\ n = |N|,\ i \in N.$$

Вектор Шепли обладает целым рядом дополнительных свойств, подтверждающих его исключительность. Одно из них связано с математическим ожиданием дохода игрока.

Определение 4. Для игрока $i \in N$ в игре $\Gamma = \langle N, v \rangle$ величина $\Delta_i(K) = v(K \cup \{i\}) - v(K)$ называется *вкладом игрока* i *в коалицию* K или приращением выигрыша коалиции K за счет игрока i.

Величина $\Delta_i(K) = v(K \cup \{i\}) - v(K)$ – разумной платой за присоединение игрока i к коалиции K, если последняя уже сформирована.

Теорема 2 (вероятностное определение вектора Шепли [1–5]). Если игроки кооперативной игры $\Gamma = \langle N, v \rangle$ присоединяются к ней в случайном порядке, причем при своем присоединении i-й игрок получает вклад $\Delta_i(K)$, где K — коалиция, возникшая до его присоединения, то математическое ожидание выигрыша i-го игрока равно соответствующей компоненте вектора Шепли.

Все перечисленные свойства вектора Шепли говорят о том, что игроки посчитают справедливым распределение общего выигрыша (платежа) в соответствии с его компонентами.

Вектор Шепли для игр с иерархической структурой

Рассмотрим две модели, в которых игроки должны разделить общий доход (платеж) с учетом организационной иерархии и «справедливый» для всех ее сотрудников.

Пусть $N = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ – множество всех сотрудников организации. Для сотрудника α обозначим через $S(\alpha)$ множество его прямых подчиненных. Будем считать, что функция $S(\alpha)$ порождает на множестве сотрудников N иррефлексивный частичный порядок. Мы предполагаем, что сотрудник α приносит доход a_α в том и только в том случае, когда он получает разрешение от всех своих руководителей. Обозначим через $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ неотрицательный вектор доходов организации, причем через a_i обозначим доход, который может принести сотрудник α_i, $i = \overline{1,n}$.

Построим кооперативную игру $\Gamma = \langle N, v \rangle$, в которой игроками будут сотрудники рассматриваемой организации. По структуре организации и способу получения дохода построим характеристическую функцию игры $\Gamma = \langle N, v \rangle$. В частности, мы знаем, что коалиция $K \subseteq N$ получит доход a_α тогда и только тогда, когда эта коалиция содержит верхний замкнутый конус $\overline{V}[\alpha]$ (руководителей и самого участника). Следовательно, значение характеристической функции v коалиции K можно найти как сумму доходов всех участников коалиции. В результате мы получим:

$$v(K) = \sum_{\alpha \in N} u_{\overline{V}[\alpha]}(K),$$

где u_T — характеристическая функция простейшей игры с носителем T. В работе [6] приведены простые формулы для расчета вектора Шепли.

Пример 1. Предположим, что в предприятие входят четыре подразделения, имеющих разную степень самостоятельности. Каждое подразделение вносит свой вклад в общий доход предприятия, однако для правильной работы подчиненных подразделений необходимо разрешение всех их руководителей (см. схему). Обозначим через a_i тот вклад, который вносит подразделение i после получения разрешения руководителей. В частности, игроки 2 и 4 вносят (зарабатывают) a_2 и a_4 независимо от оставшихся подразделений. Подразделение 3 может привнести величину a_3, лишь получив разрешение (вступив в коалицию) от своего руководителя, подразделения 4. Подразделение 1 может привнести величину a_1, лишь получив разрешение (вступив в коалицию) от всех своих руководителей, подразделений 2, 3, 4. Предположим, что все подразделения согласились работать вместе. Рассчитаем дележ, справедливый по Шепли.

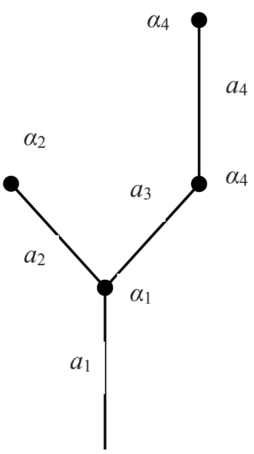

Схема иерархической структуры и выигрыши игроков

Запишем значения характеристической функции игры:

$$v_0 = 0,\ v_1 = v_3 = v_{1,3} = 0,\ v_2 = v_{1,2} = v_{2,3} = v_{1,2,3} = a_2,$$

$$v_4 = v_{1,4} = a_4,\ v_{3,4} = v_{1,3,4} = a_3 + a_4,\ v_{2,4} = v_{1,2,4} = a_2 + a_4,$$

$$v_{2,3,4} = a_2 + a_3 + a_4,\ v_{1,2,3,4} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Таким образом, игроки должны разделить заработанную ими вместе сумму: $v_{1,2,3,4} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Используя результаты работы [6], рассчитаем вектор Шепли. Его компоненты будут

$$Sh_1 = a_1/4\,,\ Sh_2 = a_2 + a_1/4\,,\ Sh_3 = a_3/2 + a_1/4\,,$$
$$Sh_4 = a_4 + a_3/2 + a_1/4\,.$$

Таким образом, подразделение 1 должно получать лишь четверть заработанной им суммы. Подразделение 2 в соответствии с согласованным принципом справедливости получит всю заработанную им сумму и четверть суммы, заработанной подразделением 1. Подразделение 3 получит половину своей заработанной суммы и четверть суммы, заработанной подразделением 1. Таким образом, административная надстройка оправдывает эксплуатацию подразделения 1.

Рассмотрим другой пример игры, в которой частичный порядок на множестве игроков согласован с их выигрышами. Пусть $N = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ — множество узлов компьютерной сети, частично упорядоченных иррефлексивным отношением. Множество узлов $S(\alpha)$, непосредственно предшествующих α, связано с узлом α линией стоимостью a_α, и узел α будет работать, если работают все узлы, предшествующие узлу α. Для работы сети с узлами из множества $K \subseteq N$ необходимо, чтобы работали все узлы, предшествующие узлам из K, то есть чтобы были построены соответствующие линии связи. Следовательно, стоимость строительства сети с узлами из K есть значение характеристической функции

$$v(K) = \sum_{\alpha \in V[K]} a_\alpha\,,$$

где $V[K]$ — множество узлов, предшествующих узлу из K, включая их самих. Простые формулы расчета компонент вектора Шепли были получены в работе [6].

Пример 2. Группа предпринимателей из четырех человек собирается построить водопроводную (электрическую) сеть по приведенной выше схеме. Обозначим через a_i стоимость части участка сети, обеспечивающей водой (электричеством) *i*-го предпринимателя. Таким образом, предпринимателю 1 достаточно построить участок стоимостью a_1. Предприниматель 2 получит воду лишь тогда, когда он построит участок стоимостью a_2 и подключится к уже построенному участку предпринимателя 1. Предприниматель 3 получит воду, если он построит участок стоимостью a_2 и подключится к водопроводу, построенному предпринимателем 1, а предприниматель 4 получит воду, построив участок стоимостью a_4 и подключившись к предпринимателю 3. Если предприниматели согласятся построить общую сеть в соответствии с предлагаемой схемой, то как они должны разделить платеж за строительство, используя вектор Шепли?

Запишем значения характеристической функции игры:

$$v_0 = 0\,,\ v_1 = a_1\,,\ v_2 = v_{1,2} = a_1 + a_2\,,\ v_3 = v_{1,3} = a_1 + a_3\,,$$
$$v_{2,3} = v_{1,2,3} = a_1 + a_2 + a_3\,,$$
$$v_4 = v_{1,4} = v_{3,4} = v_{1,3,4} = a_1 + a_3 + a_4\,,$$
$$v_{2,4} = v_{1,2,4} = v_{2,3,4} = v_{1,2,3,4} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4\,.$$

Хотя эти игры имеют различные характеристические функции, однако они имеют одинаковые векторы Шепли [4]. Следовательно, игрок 1 должен заплатить лишь четверть стоимости первого участка, то есть $a_1/4$. Игрок 2 должен оплатить свой участок и четверть стоимости начального участка. Игрок 3 оплачивает половину стоимости своего участка и четверть стоимости первого участка. Игрок 4 оплачивает свой участок, половину участка игрока 3 и четверть стоимости игрока 1.

Заключение

Рассмотренные примеры позволяют оценить влияние организационных факторов на распределение доходов.

Литература

1. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. — М. : Наука, 1985. — 272 с.

2. Теория игр : учебник. / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е. В. Шевкопляс. — 2-е изд., перераб. и доп. — СПб. : БХВ-Петербург, 2012. — 432 с.

3. Луценко М.М. Теория статистических решений : учеб. пособие. Ч. 2. — СПб. : ПГУПС, 2012. — 110 с.

4. Луценко М.М. Теория игр : учебное пособие / М.М. Луценко, А.М. Дёмин. — СПб. : ПГУПС, 2018. — 71 с.

5. Мазалов В. В. Математическая теория игр и приложения : учеб. пособие / В. В. Мазалов. – СПб. : Лань, 2010. — 446 с.

6. Луценко М.М. Веса Шепли для заданий педагогического теста / М.М. Луценко, Н.В. Шадринцева // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2017. – Т. 13. – № 3. – С. 300–312.

7. Луценко М.М. Принятие инвестиционных решений в строительстве при неполной информации о функционировании объекта / М.М. Луценко, А.М. Дёмин // Управление рисками в экономике: проблемы и решения / отв. ред. С.Г. Опарин. — СПб. : Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2015. – С. 237–259.

8. Модели управления рисками и ресурсами автоматизированных систем критического применения железнодорожного транспорта с учетом экономического фактора / А.А. Корниенко, С.Е. Ададуров, А.П. Глухов, С.В. Диасамидзе, В.Н. Кустов // Известия Петербургского университета путей сообщения. – 2017. – Т. 14. – № 4. – С. 588–596.

9. Maschler M., Solan E., Zamir S. Game Theory. Translated from the Hebrew by Ziv Hellman; English ed. by Mike Borns. Cambridge, Cambridge University Press, 2013, 1009 p.

10. Печерский С.Л., Яновская Е.Б. Кооперативные игры: решения и аксиомы. – М. : Европейский Университет в Санкт-Петербурге, 2004. — 459 с.

11. Shapley L.S. A value of n-person games. *In: H.W. Kuhn, A.W. Tucker, eds., Contributions to the Theory of Games*, 1953, Vol. 2, Princeton, Princeton University Press, pp. 307–317.

Fair Sharing`s of Total Income at Cooperative Games

Grand PhD M.M. Lutsenko, PhD A.M. Demin
Emperor Alexander I Petersburg State Transport University
St. Petersburg, Russia
ml4116@mail.ru

Abstract. **The paper considers the principles of construction of distribution (imputations) by the participants of the same project, if different participants have different economic and administrative contributions to the overall project. Cooperative games are built, taking into account the different status of the players. The core and the Shapley vector are discussed as examples of «fair» distributions. For games with a partially ordered set of players, analytical formulas for calculating the Shapley vector are given. For the considered examples of conflict situations, the «fair» of the constructed distributions is discussed.**

Keywords: **TU-game, Shapley value, partial order, fair distribution of income, distribution of shares of payments.**

References

1. Vorob'yev N.N. Game theory for cybernetic economists [Teoriya igr dlya ekonomistov-kibernetikov], Moscow, The Science, 1985, 272 p.
2. Petrosyan L.A., Zenkevich N.A., Shevkoplyas E.V. Game theory: Textbook [Teoriya igr: Uchebnik], St. Petersburg, BHV-Peterburg, 2012, 432 p.
3. Lutsenko M.M. Statistical decision theory: Study guide. Part 2 [Teoriya statisticheskikh resheniy: Uchebnoe posobie. Chast` 2], St. Petersburg, PSTU, 2012, 110 p.
4. Lutsenko M.M., Demin A.M. Game theory: Study guide [Teoriya igr: Uchebnoe posobie], St. Petersburg, PSTU, 2018, 71 p.
5. Mazalov V.V. Mathematical game theory and its application: Study guide [Matematicheskaya teoriya igr i prilozheniya: Uchebnoe posobie], St. Petersburg, LAN, 2010, 446 p.
6. Lutsenko M.M., Shadrinceva N.V. Shapley Weights for Test Items. [Vesa Shepli dlya zadaniy pedagogicheskogo testa], *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer Science. Control Processes [Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya]*, 2017, Vol. 13, No. 3, pp. 300–312.
7. Lutsenko M.M., Demin A.M. Investment Decisions — Making in Construction with Incomplete Information About the Facility's Operation [Prinyatie investitsionnykh resheniy v stroitel`stve pri nepolnoy informatsii o funktsionirovanii ob`ekta], *Risk Management in the Economy: Problems and Solutions [Upravlenie riskami v ekonomike: problemy i resheniya]*, St. Petersburg, Publishing House of Polytechnical University, 2015. pp. 237–259.
8. Korniyenko A.A., Adadurov S.Y., Glukhov A.P., Diasamydze S.V., Kustov V.N. Models of Risk and Resource Management of Railway Transport Critical Application Automation Systems with Regard to Economic Aspect [Modeli upravleniya riskami i resursami avtomatizirovannykh sistem kriticheskogo primeneniya zheleznodorozhnogo transporta s uchetom ekonomicheskogo faktora], *Proc. of Petersburg Transport University [Izvestiya Peterburgskogo universiteta putey soobshcheniya]*, 2017, Vol. 14. No. 4, pp. 588–596.
9. Maschler M., Solan E., Zamir S. Game Theory. Translated from the Hebrew by Ziv Hellman; English ed. by Mike Borns. Cambridge, Cambridge University Press, 2013, 1009 p.
10. Pecherskiy S.L., Yanovskaya E.B. Cooperative games: solutions and axioms [Kooperativnye igry: resheniya i aksiomy], Moscow, Publishing House of the European University in St. Petersburg, 2004, 459 p.
11. Shapley L.S. A value of n-person games. *In: H.W. Kuhn, A.W. Tucker, eds., Contributions to the Theory of Games*, 1953, Vol. 2, Princeton, Princeton University Press, pp. 307–317.