УДК 681.518

ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ ПУТЕЙ В НЕЧЕТКИХ ГРАФАХ

СПЕРАНСКИЙ Дмитрий Васильевич, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры; e-mail: Speranskiy.dv@gmail.com

Российский университет транспорта (МИИТ), Кафедра «Системы управления транспортной инфраструктурой», Москва

Большое разнообразие проблем в различных областях, в том числе проблем построения различного рода оптимальных решений, может быть сформулировано на языке теории графов в виде задач поиска на заданных графах специального вида оптимальных путей. Ныне получено много результатов в этих направлениях, относящихся к классической теории графов. В этой теории граф предполагается детерминированным объектом и в его описании и описании процесса его функционирования не содержится никаких неопределенностей (нечеткостей). Ныне наука подошла к осознанию того, что большинство наших знаний и связей с внешним миром не соответствуют сложившимся ранее классическим представлениям о них. Сейчас разрабатываются новые подходы к этим направлениям, которые предполагают принципиальную невозможность обойтись без «нечеткостей», которые принимаются как реальность человеческого существования. Это требует разработки комплекса понятий и методов, в которых эта «нечеткость» должна быть реально учтена в практических приложениях. В предлагаемой статье рассматриваются задачи поиска оптимальных по некоторым критериям путей в рамках принятой ныне модели нечеткого графа. При решении задачи о кратчайших путях введено и мотивировано правило выбора «лучшей» дуги. Предложен метод решения задачи с использованием конструкции ориентированного дерева путей графа. Введено понятие реализуемости пути в нечетком графе, которая оценивается как вероятность его реального существования в заданном графе. Предложен метод вычисления реализуемости пути, основанный на сведении степени принадлежности каждой дуги в пути графа к его вероятности. На этой основе решается задача о поиске пути с максимальной реализуемостью.

Ключевые слова: теория графов; нечеткие графы; поиск кратчайших путей; реализуемость пути в нечетком графе; поиск пути с максимальной реализуемостью.

DOI: 10.20295/2412-9186-2022-8-04-418-426

▼ Введение

Теория графов является разделом математики, имеющим многочисленные практические приложения. Такие приложения связаны с решением различных оптимизационных задач. Многие проблемы из разнообразных областей, в том числе построения оптимальных решений при проектировании всевозможных сетей и технических систем в автоматике, их диагностике, трассировки путей на платах и ряд других, могут быть сформулированы, в частности, как задачи поиска различного типа оптимальных путей в теории графов. Ныне имеется обширная литература, посвященная перечисленным проблемам. Сказанное относится к классической теории графов, в которой граф как объект исследования является детерминированным и в своем описании не содержит никаких неопределенностей. Такие графы принято называть четкими. Все полученные ранее многочисленные результаты в классической теории графов относятся в основном к этой модели. Они в большей своей части, так же как основные понятия теории графов, представлены в целом ряде монографий, например в [1–4], ставших ныне классическими. Поэтому далее в тексте не даются ссылки на них, предполагая знакомство читателя с этими источниками.

К сожалению, модель четкого графа не применима во многих реальных ситуациях, когда точного описания объекта исследования и его функционирования получить принципиально невозможно. В этом случае требуются новые средства, позволяющие адекватно отражать возможность появления неопределенностей, возникающих как в процессе описания объектов, так и их функционирования. В 1965 г. Л. Заде опубликовал статью [5], в которой были предложены такие средства. В ней было введено понятие нечеткого множества, ставшего истоком и основой создания ныне признанной и широко используемой в приложениях теории нечетких множеств.

Как пишет Л. Заде в предисловии к монографии А. Кофмана «Введение в теорию нечетких множеств» [6], «мы подошли к осознанию того, что большинство человеческих знаний и связей с внешним миром включают такие построения, которые нельзя назвать множествами в классическом смысле. Они представляют собой классы с нечеткими границами, когда переход от принадлежности к классу к непринадлежности происходит постепенно, не резко». Л. Заде полагает, что ставится под сомнение тот факт, что логика человеческого рассуждения основывается не на классической двузначной или даже многозначной логике, а на логике с нечеткими значениями истинности. В поисках точности делались попытки, не всегда успешные, подогнать реальный мир под модели, которые не оставляют места нечеткости. Как указывает Л. Заде, «...нужна новая точка зрения, новый комплекс понятий и методов, в которых нечеткость принимается как реальность человеческого существования».

Вскоре после публикации статьи Л. Заде [5] начались активные исследования и разработка новых методов, учитывающих феномен «нечеткости». Ныне число публикаций по этой тематике уже превышает десять тысяч. Только за последние 10 лет число таких публикаций составляет несколько сотен. Даже в сравнительно узких направлениях по проблемам «нечеткости» говорить о достаточно полных обзорах публикаций не приходится. В предлагаемой нами статье по ее тематике подробный обзор лежит за ее рамками. Поэтому мы ограничимся только упоминанием некоторых активно развивающихся направлений, таких как нечеткая логика, нечеткий логический вывод, приложения к нечетким нейронным сетям, не входящих в сферу научных интересов автора предлагаемой статьи, и только очень кратко скажем о других, более близких нам направлениях.

К числу активно исследуемых ныне направлений относятся нечеткие конечные автоматы. В монографии [7] прослежена его эволюция и приведена библиография работ по различным разновидностям автоматов и их приложениям. Так, в [8] подробно описана некоторая модель такого автомата и приведены результаты исследований по теории экспериментов с ними, имеющие важные приложения при диагностике цифровых систем. В [9] исследована проблема тестирования нечетких линейных автоматов, в [10] разработана теория поведения автомата в нечеткой среде и приведены ее приложения. Этот перечень может быть существенно расширен.

Еще одно активно развивающееся направление связано с разработкой чисто математических аспектов теории «нечетких» объектов, включая, в частности, вопросы раскраски нечетких графов, нахождения хроматических чисел объединения таких графов, моделирования задержек при проектировании дискретных устройств, вопросы матричного проектирования систем стабилизации и т.п. Некоторые из перечисленных вопросов отражены в публикациях [11–16].

Предлагаемая статья по тематике относится к исследованию оптимизационных задач для нечетких графов, и этот объект последнее десятилетие изучается очень активно. Отметим, что ныне даже издается специальный международный научный журнал — Journal of intelligent and fuzzy graphs. В качестве объектов исследования в нем рассматриваются нечеткие графы различных типов, например темпоральных, интуиционистских и др. Для этих графов рассмотрен широкий спектр проблем, в том числе живучести [17], определения доминирующего множества интуиционистского нечеткого графа [18], моделирования гетерогенных систем с использованием нечетких графов [19], оценки информационной надежности сложных систем с использованием нечетких графов [20], поиска нечеткого множества баз темпоральных нечетких графов, определения нечетких инвариантов нечетких графов и гиперграфов [21] и др.

В классической теории графов были разработаны многие важные для приложений алгоритмы решения целого ряда оптимизационных задач. Понятно, что такие алгоритмы представляют несомненный интерес и для нечетких моделей объектов, включая нечеткие графы, нечеткие автоматы, нечеткие сети и т. п.

В предлагаемой статье рассматриваются задачи поиска оптимальных по некоторым критериям путей в нечетких графах. Отметим, что известные ныне соответствующие алгоритмы для четких графов не могут быть непосредственно использованы для нечетких графов. Это объясняется необходимостью учета особенностей новой нечеткой модели, существенно отличающейся от прежней четкой. Такая необходимость может потребовать модификации некоторых понятий из классической теории графов. Вместе с тем в качестве основы для решения оптимизационных задач для нечетких графов в ряде случаев вполне может быть использована идея алгоритма для четких графов, но, возможно, подвергшаяся соответствующей адаптации.

1. Основные понятия и определения

Вначале напомним некоторые понятия и определения, используемые в нашей статье, связанные с нечеткими графами. Все они далее понимаются так, как это изложено в монографии А. Кофмана [6].

Начнем с понятия нечеткого множества. Пусть множество A есть подмножество множества E, т. е. $A \subset E$. Принадлежность элемента x множеству A будет записываться с помощью характеристической функции $\text{м}_A(x)$, которая может принимать любое неотрицательное значение, в том числе в интервале [0,1].

Математический объект:

$$A = \{(x_1 | \text{м}(x_1), (x_2 | \text{м}(x_2), \dots, (x_n | \text{м}(x_n)\},$$

где $\text{м}(x_i)$ — значение характеристической функции, определяющей степень принадлежности элемента x_i подмножеству A.

Эта структура позволяет оперировать с неполно определенными элементами, принадлежность которых лишь в некоторой степени упорядочена.

Приведем определение нечеткого подмножества, введенное Л. Заде. Пусть E — множество, x — элемент E. Тогда нечеткое подмножество A множества E есть множество упорядоченных пар:

$$\{(x, \text{м}_A(x)\}_{x \in E},$$

где $\text{м}_A(x)$ — характеристическая функция принадлежности, принимающая значение в упорядоченном множестве M, указывающее степень принадлежности x подмножеству A.

Напомним теперь определение нечеткого графа [6]. Пусть E_1, E_2 — два множества и пусть элемент $x \in E_1$, а $y \in E_2$. Множество упорядоченных пар (x, y) определяет прямое произведение $E_1 E_2$. Нечеткое подмножество G такое, что:

$$\forall (x, y) \in E_1 E_2 \ \ \text{м}_G(x, y) \in M,$$

где M — множество принадлежностей множества $E_1 E_2$ называется нечетким графом.

Встречающиеся далее в тексте понятия и термины, относящиеся к нечетким графам, понимаются в основном точно так же, как они трактуются в теории четких графов [1–4]. Понятия петли в графе, инцидентности вершин и дуг, соседство вершин, цепи, связности и т. п. для нечетких и четких графов просто совпадают. Условимся, что выше названные и многие другие совпадающие понятия трактуются так же, как в [1–4].

Если же используемые понятия для нечетких и четких графов отличаются, это будет оговариваться особо. Так, понятие пути для нечеткого и четкого графа совпадают. Длина пути в четком графе определяется как сумма длин дуг, составляющих этот путь. В нечетком графе длина пути определяется так же, однако выбор дуг, входящих в путь в нечетком графе, определяется иначе, чем в четком графе.

На плоскости оба типа графов изображаются в виде множества вершин и множества соединяющих их дуг. В четком графе для каждой дуги (x, y) указывается ее длина $a(x, y)$. Так же будет обозначаться и длина дуги (x, y) в нечетком графе. Если дуга (x, y) в нечетком графе отсутствует, положим $a(x, y) = \infty$. Этой же дуге поставим в соответствие еще одно число

$db(x, y)$, равное степени принадлежности этой дуги множеству дуг заданного нечеткого графа. Это число может быть любым неотрицательным числом [6]. Если дуга (x, y) в нечетком графе отсутствует, то положим $db(x, y) = 0$.

2. Типы оптимальных путей в нечетком графе

Чтобы пояснить предлагаемое ниже правило выбора дуги, входящей в кратчайший путь в нечетком графе, предварительно выскажем содержательные соображения и мотивацию для соответствующей корректировки правила в сравнении со случаем четкого графа.

В теории нечетких множеств ненулевая степень принадлежности дуги некоторому пути нечеткого графа допускает ее трактовку только как такой возможности. При этом возможность тем выше, чем больше значение степени принадлежности. Однако степень принадлежности является чисто формальной констатацией, и вхождение дуги в упомянутый путь необязательно имеет место в действительности. Это сопоставимо с аналогичной ситуацией в теории вероятностей, когда некоторое событие хотя и имеет ненулевую вероятность, но это совсем не означает, что оно обязательно произойдет.

Пути нечеткого графа, состоящие только из дуг с ненулевыми степенями принадлежности, будем называть виртуальными (возможными). При проходе в нечетком графе по виртуальному пути, связывающему две его выделенные вершины s и t, каждая дуга пути реально может отсутствовать в нем, хотя имеет ненулевую степень принадлежности. В этом случае такой путь не обеспечивает возможности реализуемого прохода из s в t. Таким образом, этот путь существует лишь формально, но не является реально реализуемым.

Понятно, что для получения в качестве решения задачи поиска оптимального в некотором смысле пути в нечетком графе требуется располагать в нечетком графе максимально возможным числом путей, связывающих вершины s и t, в которых все участвующие в них дуги имеют максимальную возможность реально присутствовать в них. Естественно, что для получения такого множества путей необходимо, чтобы на каждом шаге выбор очередной «лучшей» дуги для построения искомого пути эта дуга имела максимальное значение степени принадлежности в множестве альтернативных дуг. Очевидно, что возможность получения реализуемого пути прохода в нечетком графе из вершины s в вершину t тем выше, чем больше значения степеней принадлежности дуг, входящих в этот путь.

Если в множестве альтернативных дуг только одна дуга (x, y) имеет максимальное значение степени принадлежности дуги (x, y), то длиной этой дуги полагаем число $a(x, y)$. Если в множестве альтернативных дуг одно и то же максимальное значение степени ее принадлежности имеют несколько кандидатов, то в качестве «лучшей» дуги для включения в оптимальный путь естественно выбирать дугу с минимальным значением $a(x, y)$, и это значение полагается равным длине этой дуги.

Таким образом, правило выбора «лучшей» дуги из множества альтернатив состоит в том, что сначала этот выбор осуществляется по критерию максимальности значения степени принадлежности. В случае наличия нескольких альтернативных кандидатов возникает необходимость выполнения еще одного этапа выбора, осуществляемого по критерию минимальности значения величины $a(x, y)$.

Представляется, что это правило является истинным, поскольку позволяет получить максимально возможное по мощности множество реализуемых путей в нечетком графе, связывающих вершину s с вершиной t.

Поскольку каждой дуге (x, y) в нечетком графе соответствуют два параметра $a(x, y)$ и $db(x, y)$, то для каждого реализуемого пути в нечетком графе также будут использоваться два параметра. Один — это длина пути, равная сумме длин входящих в него дуг, другой — вероятность реализуемости пути.

Поясним, как можно преобразовать степени принадлежности дуг в нечетком графе в вероятности и на этой основе вычислить вероятность реализуемости пути. Легко видеть, что функция принадлежности нечеткого множества напоминает плотность распределения вероятностей. Они отличаются только тем, что сумма вероятностей по всем возможным значениям случайной величины всегда равна 1, а сумма S значений функции принадлежности всех дуг в нечетком графе может быть любым неотрицательным числом.

В связи с этим возникает возможность сведения функции принадлежности дуги графа к функции распределения вероятностей (или к функции плотности вероятностей). Такое сведение можно реализовать нормированием функции принадлежности, разделив все ее значения на S (при $S \neq 0$). Этот способ использовался ранее в ряде публикаций.

В случае четкого графа оценка каждого пути в задачах о кратчайших путях производилась только по одному критерию (длине пути). В случае нечеткого графа каждому пути ставится в соответствие два показателя (длина пути и вероятность его реализуемости). Это означает, что для нечеткого графа оценка пути может производиться в принципе только по его длине, и тогда соответствующая задача превращается в задачу о кратчайшем пути. Оценивать пути можно также только по критерию его реализуемости (вероятности). Таким образом, в случае нечеткого графа можно рассматривать оптимизационные задачи по двум перечисленным критериям. Понятно, что выбор критериев должен производиться исходя из потребностей конечного потребителя соответствующих результатов.

3. Методы поиска оптимальных путей в нечетких графах

Известно, что для решения задачи о кратчайшем пути для четкого графа есть несколько алгоритмов [22]. В частности, алгоритм, предложенный Дейкстрой, считается одним из самых эффективных. Далее будет показано, как идею алгоритма Дейкстры можно адаптировать к решению рассматриваемых задач поиска оптимальных путей для нечеткого графа. Для этого в нем выбор «лучшей» дуги из множества альтернативных в процессе выполнения алгоритма должен осуществляться по правилу, сформулированному в предыдущем разделе статьи.

Кратко опишем идею алгоритма Дейкстры для четкого графа [22]. Пусть требуется найти кратчайший путь в нечетком графе из вершины s в вершину t. Предположим, что нам уже известно m вершин, ближайших к вершине s, и также известны сами кратчайшие пути из s в выделенные m вершин. Близость вершин x и y означает, что вершина x непосредственно связана с вершиной y дугой. Определим $(m + 1)$-ю ближайшую к s вершину. С этой целью окрасим s и m ближайших к ней вершин, непосредственно соединяющие дугами (x, y) каждую окрашенную вершину x с y. Выберем из этих путей кратчайший и далее будем считать его условно кратчайшим путем из s в y. Очевидно, что ближайшей к s $(m + 1)$-й вершиной будет та, для которой условно кратчайший путь будет иметь наименьшую длину. Это следует из того, что путь из s в $(m + 1)$-ю ближайшую вершину при положительных значениях длин всех дуг в качестве промежуточных должен содержать лишь окрашенные вершины. Таким образом, начиная с $m = 0$, приведенная процедура должна повторяться до тех пор, пока в качестве очередной $(m + 1)$-й ближайшей вершиной к s не окажется вершина t, т. е. будет получен путь из s в t.

Из описания алгоритма Дейкстры следует, что процесс поиска кратчайшего пути между вершинамиs s и t сводится к наращиванию ориентированного дерева с корнем в вершине s. Когда при наращивании дерева достигается вершина t, то процесс завершается. Перейдем теперь к описанию метода решения задач построения оптимальных по разным критериям оценки путей в нечетком графе.

Вначале рассмотрим задачу построения кратчайшего пути из вершины s заданного нечеткого графа в вершину t. Начнем с построения ориентированного дерева с корнем в вершине s. Это дерево есть структура, состоящая из ветвей, расположенных в последовательных уровнях. Высшим уровнем является нулевой, следующим является первый уровень и так далее. В нулевой уровень помещается одна вершина s. Она порождает вершины 1-го уровня. Количество порождаемых вершин равно числу вершин, ближайших к вершине s. Каждая такая вершина помечается именем, используемым для обозначения ее в заданном изображении нечеткого графа, и из вершины s в нее проводится дуга. Каждая такая дуга помечается упорядоченной парой чисел, первое из которых есть длина дуги, а второе — степень принадлежности этой дуги множеству дуг нечеткого графа (эти данные берутся из задания нечеткого графа).

Каждая вершина 1-го уровня порождает вершины 2-го уровня точно так же, как это описано для вершин первого уровня. Процесс построения ветвей в дереве решений продолжается до появления в очередном уровне дерева вершины t. Понятно, что в общем случае пути, ведущие в дереве от вершины s к вершине t, могут содержать разное количество дуг, составляющих их.

Отметим, что каждая вершина в упомянутом дереве порождает вершины следующего уровня по правилу выбора «лучшей» дуги, сформулированному в предыдущем разделе статьи.

Завершив построение ориентированного дерева, становятся известными все возможные пути из вершины s в вершину t в нечетком графе. Подсчитав сумму длин всех дуг (первых компонент в упорядоченных парах чисел, относящихся к дуге) пути, получаем длину каждого пути в построенном дереве. Выбрав из них путь минимальной длины, получаем решение задачи о кратчайшем пути в нечетком графе.

Перейдем теперь к рассмотрению задачи о поиске пути в нечетком графе, имеющем максимальное значение реализуемости. Это значение будет оцениваться по соответствующей вероятности. Опишем, как вычислить эту вероятность.

Начнем с того, что заданные в нечетком графе числа, указывающие степени принадлежности дуг, сведем к вероятностям. Такое сведение можно осуществить, как было сказано выше, нормированием функции принадлежности, разделив все ее значения на S (при $S \neq 0$).

Реализуемость пути из вершины s в вершину t в нечетком графе означает, что каждая дуга этого пути в момент прохождения пути в нем присутствует. Будем рассматривать наличие дуги в пути как событие. Тогда реализуемость пути представляет собой появление последовательности событий, состоящих в появлении в определенном порядке дуг этого пути. Таким образом, путь можно интерпретировать как произведение упомянутых событий. Понятно, что события, состоящие в появлении определенной совокупности дуг, составляющих путь, являются независимыми в совокупности [23].

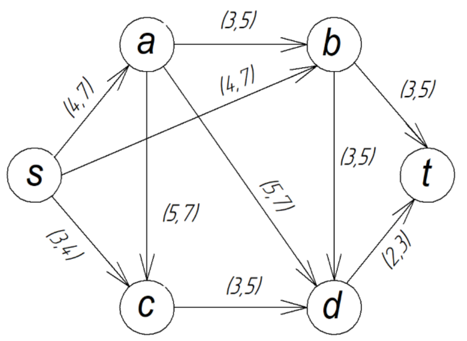

Рис. 1. Пример нечеткого графа

Это свойство независимости событий в совокупности очевидным образом вытекает из смысла задачи.

Из теоремы умножения в теории вероятностей [23] в качестве следствия вытекает следующее утверждение: вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий. На основании этого следствия вероятность реализуемости некоторого пути в нечетком графе равна произведению вероятностей дуг, входящих в этот путь.

Таким образом, по построенному ориентированному дереву числовые значения степени принадлежности дуг преобразуются в вероятности, а их произведение дает вероятность реализуемости пути. Располагая этими данными для всех путей в дереве, путь, имеющий максимальное значение вероятности, дает решение рассматриваемой задачи.

Проиллюстрируем изложенное выше на простом примере. Рассмотрим нечеткий граф, представленный на рис. 1. Напомним, что каждой дуге этого графа соответствует упорядоченная пара чисел. Первое слева число в этой паре является длиной дуги, а второе — степенью принадлежности дуги множеству дуг заданного графа.

Вначале рассмотрим задачу поиска кратчайшего пути из вершины s в вершину t. По заданному нечеткому графу построим ориентированное дерево с корнем в вершине s, которую помещаем в нулевой уровень. В заданном графе находим ближайшие к s вершины и помещаем их в 1-й уровень. В нашем примере имеется три таких вершины a,b,c, в которые проводятся дуги $(s,a),(s,b),(s,c)$. В соответствии с введенным нами правилом выделяем дуги $(s,a),(s,b)$,

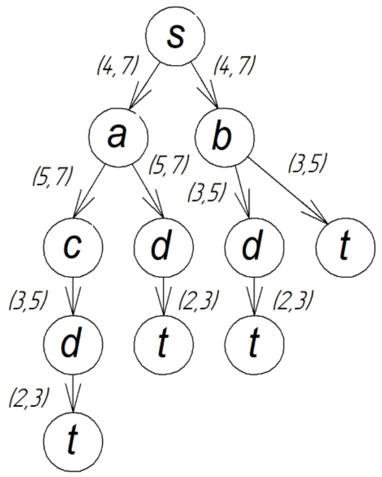

Рис. 2. Ориентированное дерево для примера нечеткого графа

которые имеют максимальные степени принадлежности, равные 7. Дуга (s, c) в это множество не входит. Поскольку длины обеих этих дуг равны, эти вершины a,b помещаем в первый уровень. Следовательно, в дереве появилось разветвление. Построим теперь второй уровень дерева. Вершины c,d являются ближайшими к вершине a с равными 7 степенями принадлежностями и равными длинами дуг (a,c) и (a,d). Поэтому обе эти вершины $\tilde{n},d$ помещаются во второй уровень дерева. Следовательно, в дереве появилось еще одно разветвление. Из вершин c и d выходит по одной дуге, т. е. они в качестве ближайших имеют вершины d и t. Эти обе вершины помещаются в третий уровень дерева. Понятно, что из вершины d третьего уровня проводится единственная дуга в вершину t, помещаемую в четвертый уровень дерева. Поскольку достигнута вершина t, то искомый путь из вершины s построен.

Аналогичным образом строятся ветви дерева из всех точек разветвления, возникающих в описанном процессе. В конечном итоге будет построено ориентированное дерево, содержащее все возможные варианты искомых путей. Для рассматриваемого нами примера это дерево представлено на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что в построенном дереве имеется 4 различных пути из вершины s в вершину t:

$s\xrightarrow{(4,7)}a\xrightarrow{(5,7)}c\xrightarrow{(3,5)}d\xrightarrow{(2,3)}t$; длина пути 14;

$s\xrightarrow{(4,7)}a\xrightarrow{(5,7)}d\xrightarrow{(2,3)}t$; длина пути 11;

$s\xrightarrow{(4,7)}b\xrightarrow{(3,5)}d\xrightarrow{(2,3)}t$; длина пути 9;

$s\xrightarrow{(4,7)}b\xrightarrow{(3,5)}t$; длина пути 7.

Таблица 1**. Вероятности появления дуг в путях нечеткого графа (см. рис. 1)**

№ п/п	Дуга	Степень принадлежности	Вероятность
1	(s, a)	7	7/55 = 0,127272
2	(s, b)	7	7/55 = 0,127272
3	(s, c)	4	4/55 = 0,072727
4	(a, c)	7	7/55 = 0,127272
5	(c, d)	5	5/55 = 0,090909
6	(d, t)	3	3/55 = 0,054545
7	(a, d)	7	7/55 = 0,127272
8	(b, d)	5	5/55 = 0,090909
9	(b, t)	5	5/55 = 0,090909
10	(a, b)	5	5/55 = 0/090909

Из этих данных получаем, что кратчайшим путем из s в t является четвертый путь, имеющий длину 7.

Рассмотрим теперь задачу поиска пути с максимальным значением реализуемости в этом же нечетком графе. Для заданного нечеткого графа подсчитаем сумму степеней принадлежностей всех его дуг. В нашем примере нечеткий граф имеет 10 дуг с общей суммой $S = 55$. Далее упомянутые степени принадлежности дуг, входящие в построенное ранее дерево, сведем к соответствующим вероятностям. Напомним, что это будет выполнено нормированием функции принадлежности делением значений степеней принадлежности дуг на сумму S. Результаты сведения представлены в табл. 1.

Вычислим теперь вероятность реализации каждого из четырех путей, приведенных выше. Напомним, что вероятность реализации каждого пути, как это было указано выше, равна произведению вероятностей входящих в него дуг.

Первый путь в построенном дереве (см. рис. 2) содержит дуги (s, a), (a, c), (c, d), (d, t), вероятности которых приведены в табл. 1. Произведение вероятностей этих дуг, т. е. вероятность реализации этого пути, равна 0,0000803207. Аналогичные расчеты для второго пути (s, a), (a, d), (d, t) дают значение реализуемости, равное 0,0008835287, для третьего пути (s, a), (b, d), (d, t) значение реализуемости равно 0,00006310949, для четвертого пути (s, b), (d, t) значение реализуемости равно 0,0115701702. Из приведенных данных следует, что наибольшее значение реализуемости имеет четвертый путь.

Заключение

В статье рассматриваются задачи поиска некоторых оптимальных путей в нечетком графе. Одна из них — поиск кратчайших путей, связывающих две выделенные вершины в нечетком графе. Предложен метод решения этой задачи, основанный на построении ориентированного дерева. В отличие от аналогичной задачи для четкого графа, правило выбора дуг, включаемых в кратчайший путь, существенно отличается от соответствующего правила для четкого графа. В случае нечеткого графа при выборе «лучшей» дуги учитывается прежде всего значение степени принадлежности. Только при равенстве этого значения для нескольких альтернативных кандидатов в качестве «лучшей» из них выбирается дуга с минимальным значением ее длины. Таким образом, становится возможным случай, когда в кратчайший путь попадает дуга не с минимальной длиной (но с меньшей степенью принадлежности). Смысл корректировки правила выбора дуги состоит в том, что в нечетком графе имеются пути, существующие только формально из-за «реального» их отсутствия при проходе по пути. Однако среди множества всех виртуальных путей в нечетком графе, связывающих две вершины, с точки зрения здравого смысла поиск кратчайших путей естественно производить из тех путей, которые имеют наибольшие шансы быть реализуемыми.

В статье введено понятие реализуемости пути в нечетком графе, которая оценивается как вероятность его «реального» существования в заданном графе. Предложен метод вычисления реализуемости пути, основанный на сведении степени принадлежности каждой дуги в пути графа к его вероятности. На этой основе решается задача о поиске пути с максимальной реализуемостью. ▲

Библиографический список

1. Берж К. Теория графов и ее применения / К. Берж. — М.: Иностранная литература, 1962. —320 с.
2. Оре О. Теория графов / О. Оре. — М.: Наука, 1980. — 336 с.
3. Харари Ф. Теория графов / Ф. Харари. — М.: Мир, 1973. — 301 с.
4. Зыков А. А. Основы теории графов / А. А. Зыков. — М.: Вузовская книга, 2004. — 664 с.
5. Zadeh L. A. Fuzzy sets / L. A. Zadeh // Inf. Contro. — 1965. — № 8. — Pp. 338–353.
6. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. — М.: Радио и связь, 1982. —432 с.
7. Dubots D. Fuzzy sets and systems: theory and applications / D. Dubots, H. Prade. — New York: Academy Press, 1980. — 393 p.
8. Speranskiy D. V. Experiments with fuzzy state machine / D. V. Speranskiy. // Automation and Remote Control. — 2015. — Vol.76:2. — Pp. 278–291.
9. Сперанский Д. В. Тестирование нечетких линейных автоматов / Д. В. Сперанский // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. — 2019. — Т. 19:2. — С. 233–240.
10. Стефанюк В. П. Поведение конечного автомата в нечеткой среде: теория и приложения / В. П. Стефанюк // Искусственный интеллект и принятие решений. — 2014. — № 3. — С. 54–71.
11. Rosyida L. On construction of fuzzy chromatic number of cartesian product of paths and other fuzzy graphs / L. Rosyida, Widodo, D. Indriati et al. // Journal of Intelligent and Fuzzy Graphs. — 2020. — Vol. 39. — № 1. — Pp. 1073–1080.
12. Rosyida L. Fuzzy chromatic number of union of fuzzy graphs. An algorithm. Properties and its application / L. Rosyida, Widodo, D. Indriati et al. // Journal of Intelligent and Fuzzy Graphs // Fuzzy Sets and Systems. — 2020. — Vol. 38. — Pp. 115–131.
13. Samanta S. Fuzzy colouring of fuzzy graphs / S. Samanta, T. Paramanic, V. Pal // Africa Matematica. — 2016. — Vol. 27. — № 1–2. — Pp. 37–50.
14. Maharatra R. Application of coloring of fuzzy graphs / R. Maharatra, M. Pal, S. Samanta // Informatica. — 2020. — Vol. 31. — № 2. — Pp. 313–330.
15. Al-Humaidi H. M. A fuzzy logic approach to model delays in construction projects using rotational fuzzy fault tree models / H. M. Al-Humaidi, F. H. Hudripriono Tan // Civil Engineering and Environmental Systems. — 2019. — Vol. 27. — № 4. — 2019. — Pp. 329–351.
16. Sambariya D. K. A novel fuzzy rule matrix design for fuzzy logic based power system stabilizer / D. K. Sambariya, R. Prasad // Power Components and Systems. — 2017. — Vol. 45. — № 1. — Pp. 34–48.
17. Хорохорин М. А. Применение распределенных информационных систем для оценки живучести нечетких графов / М. А. Хорохорин, А. А. Долгов, М. Ауад и др. // Информация и безопасность. — 2012. — Т. 15. — № 2. — С. 245–248.
18. Боженюк А. В. Определение доминирующего множества интуиционистского нечеткого графа / А. В. Боженюк, С. А. Беляков, О. В. Косенко и др. // Инженерный вестник Дона. — 2019. — № 3(54). — С. 11–13.
19. Петрунина У. В. Нечеткие графы в функционально-логическом моделировании гетерогенных систем / У. В. Петрунина // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. — 2012. — № 7. — С. 78–79.
20. Боженюк А. В. Оценка информационной надежности сложных систем с помощью нечетких графов / А. В. Боженюк, С. А. Беляков, О. В. Косенко // Наука и технология железных дорог. — 2012. — Т. 3. — № 4. — С. 65–74.
21. Берштейн Л. С. Нечеткие инварианты нечетких графов и гиперграфов / Л. С. Берштейн, А. В. Боженюк // Нечеткие графы и мягкие вычисления. — 2011. — Т. 6. — № 1. — С. 43–54.
22. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графа / Э. Майника // М.: Мир, 1981. — 324 с.
23. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман // М.: Высшая школа, 2003. — 479 с.

TRANSPORT AUTOMATION RESEARCH, 2022, Vol. 8, No. 4, pp. 418–426
DOI: 10.20295/2412-9186-2022-8-04-418-426

About Search of Optimal Paths in Fuzzy Graphs

Information about authors
Speranskiy D. V., Doctor in Engineering, Professor.
E-mail: Speranskiy.dv@gmail.com

Russian University of Transport (MIIT), Department of Management Systems for Transport Infrastructure, Moscow

Abstract: A large variety of problems in different fields, including the problems of the creation of optimal solutions of different kinds, can be formulated in graph theory language in the form of search tasks at given graphs of optimal paths of special character. Many results in these courses are now obtained which refer to classical graph theory. In this theory, a graph is assumed to be a deterministic object and there are no any uncertainties (fuzzinesses) in its description and in the description of its functioning process. Nowadays, science has come to the realization that the majority of our knowledge and links with the external world do not correspond to formerly established classical notions about them. New approaches to these areas are now being developed, which imply principal impossibility to do without fuzzinesses that are accepted as a reality of human existence. This requires the development of complex of concepts and methods which in, this fuzziness should be taken into account really in practical applications. In the proposed article, the tasks of searching optimal paths according to some criteria in the frames of currently accepted fuzzy graph model are considered. When solving the problem of the shortest paths, the rule of choosing the "best" arc is introduced and motivated. The method of solving the tasks with the use of the design of oriented graph path tree is proposed. The notion of path feasibility in fuzzy graph is introduced, the feasibility is evaluated as the probability of path real existence in given graph. The method for calculation of path feasibility, based on the reduction of belonging degree of each arc in the path of graph path to its probability, is proposed. The task on the search of path with maximum feasibility is solved on this basis.

Keywords: graph theory; fuzzy graphs; shortest path search; path feasibility in fuzzy graph; search of path with maximal feasibility.

References

1. Berzh K. *Teoriya grafov i ee primeneniya* [Theory of graphs and its applications]. Moscow: Inostrannaya literature Publ., 1962. 320 p. (In Russian)
2. Ore O. *Teoriya grafov* [Graph Theory]. Moscow: Nauka Publ., 1980. 336 p. (In Russian)
3. Kharari F. *Teoriya grafov* [Graph Theory]. Moscow: Mir Publ., 1973. 301 p. (In Russian)
4. Zykov A. A. *Osnovy teorii grafov* [Fundamentals of graph theory]. Moscow: Vuzovskaya kniga Publ., 2004. 664 p. (In Russian)
5. Zadeh L. A. Fuzzy sets. Inf. Contro. 1965, I. 8, pp. 338–353.
6. Kofman A. *Vvedenie v teoriyu nechetkikh mnozhestv* [Introduction to the theory of fuzzy sets]. Moscow: Radio i svyaz' Publ., 1982. 432 p. (In Russian)
7. Dubots D., Prade H. Fuzzy sets and systems: theory and applications. NY.1980: Academy Press, pp. 393.
8. Speranskiy D. V. Experiments with fuzzy state machine. Automation and Remote Control, 2015, vol. 76:2, pp. 278–291.
9. Speranskiy D. V. Testirovanie nechetkikh lineynykh avtomatov [Testing of fuzzy linear automata]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izv. Sarat. university New ser. Maths. Mechanics. Informatics]. 2019, vol. 19:2, pp. 233–240. (In Russian)
10. Stefanyuk V. P. Povedenie konechnogo avtomata v nechetkoy srede: teoriya i prilozheniya [Behavior of a Finite Automaton in a Fuzzy Environment: Theory and Applications]. *Iskusstvennyy intellekt i prinyatie resheniy* [Artificial intelligence and decision making]. 2014, I. 3, pp. 54–71. (In Russian)
11. Rosyida L., Widodo, Indrati C. R., Indrati D. On construction of fuzzy chromatic number of cartesian product of paths and other fuzzy graphs. Journal of Intelligent and Fuzzy Graphs, vol. 39, I. 1, 2020, pp. 1073–1080.
12. Rosyida L., Widodo, Indrati C.R., Indrati D., Nurhaida N. Fuzzy chromatic number of union of fuzzy graphs. An algorithm. Properties and its application. Journal of Intelligent and Fuzzy Graphs. Fuzzy Sets and Systems, vol. 38, 2020, p. 115–131.
13. Samanta S., Paramanic T., Pal V. Fuzzy colouring of fuzzy graphs. Africa Matematica. 2016, vol. 27, I. 1–2, pp. 37–50.
14. Maharatra R., Pal M., Samanta S. Application of coloring of fuzzy graphs. Informatica. 2020, vol. 31, I. 2, pp. 313–330.
15. Al-Humaidi H. M., Hudripriono Tan F. H. A fuzzy logic approach to model delays in construction projects using rotational fuzzy fault tree models. Civil Engineering and Environmental Systems. 2019, vol. 27, I. 4, pp. 329–351.
16. Sambariya D. K., Prasad R. A novel fuzzy rule matrix design for fuzzy logic based power system stabilizer. Power Components and Systems. 2017, vol. 45, I. 1, pp. 34–48.
17. Khorokhorin M. A. Primenenie raspredelennykh informatsionnykh sistem dlya otsenki zhivuchesti nechetkikh grafov [Application of distributed information systems to assess the survivability of fuzzy graphs]. *Informatsiya i bezopasnost'* [Information and security]. 2012, vol. 15, I. 2, pp. 245–248. (In Russian)
18. Bozhenyuk A. V. Opredelenie dominiruyushchego mnozhestva intuitsionistskogo nechetkogo grafa [Definition of the dominating set of an intuitionistic fuzzy graph]. *Inzhenernyy vestnik Dona* [Engineering Bulletin of the Don]. 2019, I. 3 (54), pp. 11–13. (In Russian)
19. Petrunina U. V. Nechetkie grafy v funktsional'no–logicheskom modelirovanii geterogennykh system [Fuzzy graphs in functional-logical modeling of heterogeneous systems]. *Mezhdunarodnyy zhurnal prikladnykh i fundamental'nykh issledovaniy* [International Journal of Applied and Fundamental Research]. 2012, I. 7, pp. 78–79. (In Russian)
20. Bozhenyuk A. V. Otsenka informatsionnoy nadezhnosti slozhnykh sistem s pomoshch'yu nechetkikh grafov [Assessment of the information reliability of complex systems using fuzzy graphs]. *Nauka i tekhnologiya zheleznykh dorog* [Science and technology of railways]. 2012, vol. 3, I. 4, pp. 65–74. (In Russian)
21. Bershteyn L. S. Nechetkie invarianty nechetkikh grafov i gipergrafov [Fuzzy invariants of fuzzy graphs and hypergraphs]. *Nechetkie grafy i myagkie vychisleniya* [Fuzzy graphs and soft calculations]. 2011, vol. 6, I. 1, pp. 43–54. (In Russian)
22. Maynika E. *Algoritmy optimizatsii na setyakh i grafa* [Optimization algorithms for networks and graphs]. Moscow: Mir Publ., 1981. 324 p. (In Russian)
23. Gmurman V. E. *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability theory and mathematical statistics]. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 2003. 479 p. (In Russian)