УДК 539.3

Изгиб секторальной пластины: использование систем компьютерной алгебры

Д. П. Голоскоков[1], А. В. Матросов[2]

[1]Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Российская Федерация, 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9
[2]Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Голоскоков Д. П., Матросов А. В.* Изгиб секторальной пластины: использование систем компьютерной алгебры // Известия Петербургского университета путей сообщения. — СПб.: ПГУПС, 2023. — Т. 20. — Вып. 2. — С. 376–384. DOI: 10.20295/1815-588X-2023-2-376-384

Аннотация

Цель: Численно-аналитическим методом исследовать напряженно-деформированное состояние тонкой однородной изотропной пластины в форме сектора. Рассмотреть вопрос о возможности использования систем компьютерной алгебры (СКА) (computer algebra system, CAS) для расчета секторальных пластин, работающих на изгиб от поперечной нагрузки. Показать эффективность применения одной из таких СКА на примере системы Maple для выполнения расчетов по методу Ритца — выполнение аналитических преобразований при вычислении интеграла, определяющего функционал полной потенциальной энергии, формирование и решение основной разрешающей системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных числовых коэффициентов в формуле, аппроксимирующей прогиб пластины, визуализация полученного решения. **Методы:** Используется прямой метод решения вариационной задачи о минимизации функционала полной потенциальной энергии деформации тонкой однородной изотропной пластины в форме сектора — метод Ритца. Решение строится в форме ряда по базисным функциям. В качестве базисных функций выбираются полиномиальные функции, точно удовлетворяющие всем граничным условиям. **Результаты:** Получено приближенное численно-аналитическое решение задачи изгиба секторальной пластины в форме четверти круга, защемленной по контуру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой. Продемонстрирована эффективность использования системы аналитических вычислений Maple для решения задачи изгиба секторальной пластины вариационным методом Ритца. Показано, что полученное решение быстро сходится как для прогиба, так и для изгибающих моментов и напряжений. **Практическая значимость:** Предложенный в статье алгоритм решения задач изгиба секторальных пластин может быть рекомендован к практическому использованию при определении напряженно-деформированного состояния таких пластин.

Ключевые слова: Секторальная пластина, изгиб пластины, функционал полной потенциальной энергии пластины, метод Ритца, системы компьютерной алгебры.

Введение

На сегодняшний день в математических исследованиях широко используются так называемые системы компьютерной алгебры (СКА) (иногда их называют системами символьных (аналитических) вычислений или, реже, компьютерной математики).

Одной из первых работ по применению компьютерной алгебры для анализа свободных колебаний пластин методом Рэлея — Ритца является работа [1]. В статье [2] символьные вычисления в тригонометрических рядах использовались для решения задач небесной механики.

В работах [3–5] решены различные задачи статики и динамики прямоугольных, круговых и секторальных пластинок с использованием различных СКА.

Познакомиться с современным состоянием внедрения в практику строительной механики СКА можно в работе [6].

Среди современных СКА можно выделить группу наиболее развитых пакетов: MathCAD, Reduce, Mathematica, Maple, Macsyma, Derive и Axiom. Среди всех перечисленных СКА несомненными лидерами являются пакеты Maple и Mathematica.

Пакет Maple позволяет эффективно решать задачи из многих разделов современной математики и математических задач из других областей [7–9]. Пакет работает на многих моделях ПК (IBM-совместимых, Macintosh и других типах ЭВМ). Весьма эффективным в ряде случаев оказывается использование его в сочетании с таким пакетом, как MatLab.

Основания аналитических методов применительно к задачам расчета пластин были заложены русскими учеными С. П. Тимошенко [10], И. Г. Бубновым [11].

Расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций часто связан с большими математическими трудностями. Использование СКА позволяет эффективно преодолеть эти трудности [12–15].

В данной работе задача прочностного анализа НДС секторальной пластины успешно решается в пакете *Maple*.

Математическая модель

Рассмотрим упругое равновесие плоской однородной изотропной пластинки постоянной толщины h. Обозначим прогиб срединной поверхности пластинки $w(x, y)$, интенсивность поперечной нагрузки $q(x, y)$.

Как известно, полная потенциальная энергия такой пластины:

$$U = \iint_{\Omega} F(x, y)\, dxdy . \qquad (1)$$

В формуле (1) интеграл распространен на плоскую область Ω, ограниченную контуром пластины Γ, $F(x,y)$ — плотность полной потенциальной энергии пластины:

$$F(x,y) = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. +2(1-\nu)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]\right\} -$$
$$- q(x,y)\, w(x,y).$$

Рассматривается задача о минимуме полной потенциальной энергии пластины (1). Требуется найти непрерывную в области Ω функцию $w(x, y)$ вместе с частными производными до четвертого порядка, принимающую на контуре Γ заданные значения и доставляющую интегралу (1) минимальное значение.

Станем рассматривать граничные условия жесткого защемления контура:

$$w\big|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial w}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = 0 . \qquad (2)$$

Плотность полной потенциальной энергии пластины в частном случае жестко защемленного контура упрощается и имеет вид:

$$F(x,y) = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 -$$
$$- q(x,y)\, w(x,y). \qquad (3)$$

Будем исследовать изгиб пластины методом Ритца. Выбираем координатные функции $\varphi_{i,j}(x, y)$, точно удовлетворяющие граничным условиям защемления на контуре Г. Задаем прогиб пластины в виде:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} c_{i,j}\varphi_{i,j}(x, y). \qquad (4)$$

После подстановки формул (3), (4) в (1) и вычисления интеграла по области Ω получим функцию $M \cdot N$ переменных относительно неизвестных коэффициентов $c_{i,j}$. Необходимое условие минимума функции U приводит к системе $M \cdot N$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $c_{i,j}$:

$$\frac{\partial U}{\partial c_{i,j}} = 0, i = 1.2\ldots M; j = 1, 2, \ldots, N. \qquad (5)$$

Числовой пример

Рассмотрим упругое равновесие плоской однородной изотропной пластинки постоянной толщины h, имеющей в плане форму сектора (четверть круга радиуса R) и жестко защемленной по контуру (рис. 1).

Контур пластины задается уравнениями:

$$R^2 - x^2 - y^2 = 0, y = 0, x = 0.$$

Выбираем базисные функции, удовлетворяющие граничным условиям защемления на контуре:

$$\varphi_{i,j}(x, y) = \left(R^2 - x^2 - y^2\right)^2 y^2 x^2 x^{i-1} y^{j-1}.$$

Функционал энергии (1) в этом случае может быть вычислен, например, так:

$$U = \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \int_0^R F(x, y)\, dx \qquad (6)$$

или в полярных координатах:

$$U = \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r d\theta dr, \qquad (7)$$

где $F(x, y)$ определяется формулой (3).

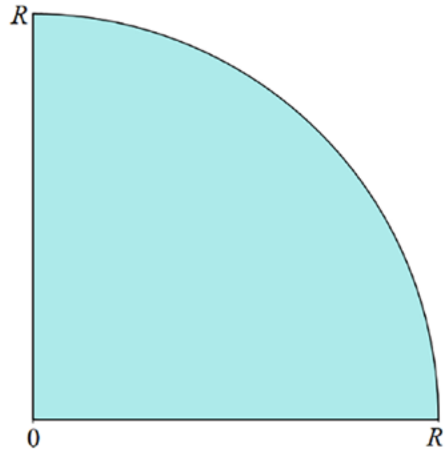

Рис. 1. Секторальная пластина

Расчет выполнялся при следующих параметрах пластины: модуль Юнга $E = 2{,}2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$. Толщина пластины $h = 0{,}01$ м. Радиус пластины $R = 1$ м. Поперечная нагрузка — равномерное давление $q(x, y) = 10$ кН.

Отметим, что вычисление по формуле (6) предпочтительней по сравнению с формулой (7) с точки зрения временных затрат — по формуле (6) время счета при $M = N = 3$ составляет 6,8 секунды, а по формуле (7) — 11,9 секунды; при $M = N = 5$ соответственно 371,5 секунды и 71,3 секунды.

Все вычисления выполнялись в системе символьных вычислений Maple.

Отобразим полученный результат на графиках. Эпюры прогиба в форме контурных линий (рис. 2).

Эпюры прогибов в центральном сечении при

$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ (рис. 3).

Сравнение результатов (рис. 2, 3) при различных значениях M и N показывает, что для вычисления прогиба достаточно ограничиться в формуле (4) значениями $M = N = 3$.

Эпюры радиального изгибающего момента в форме контурных линий (рис. 4).

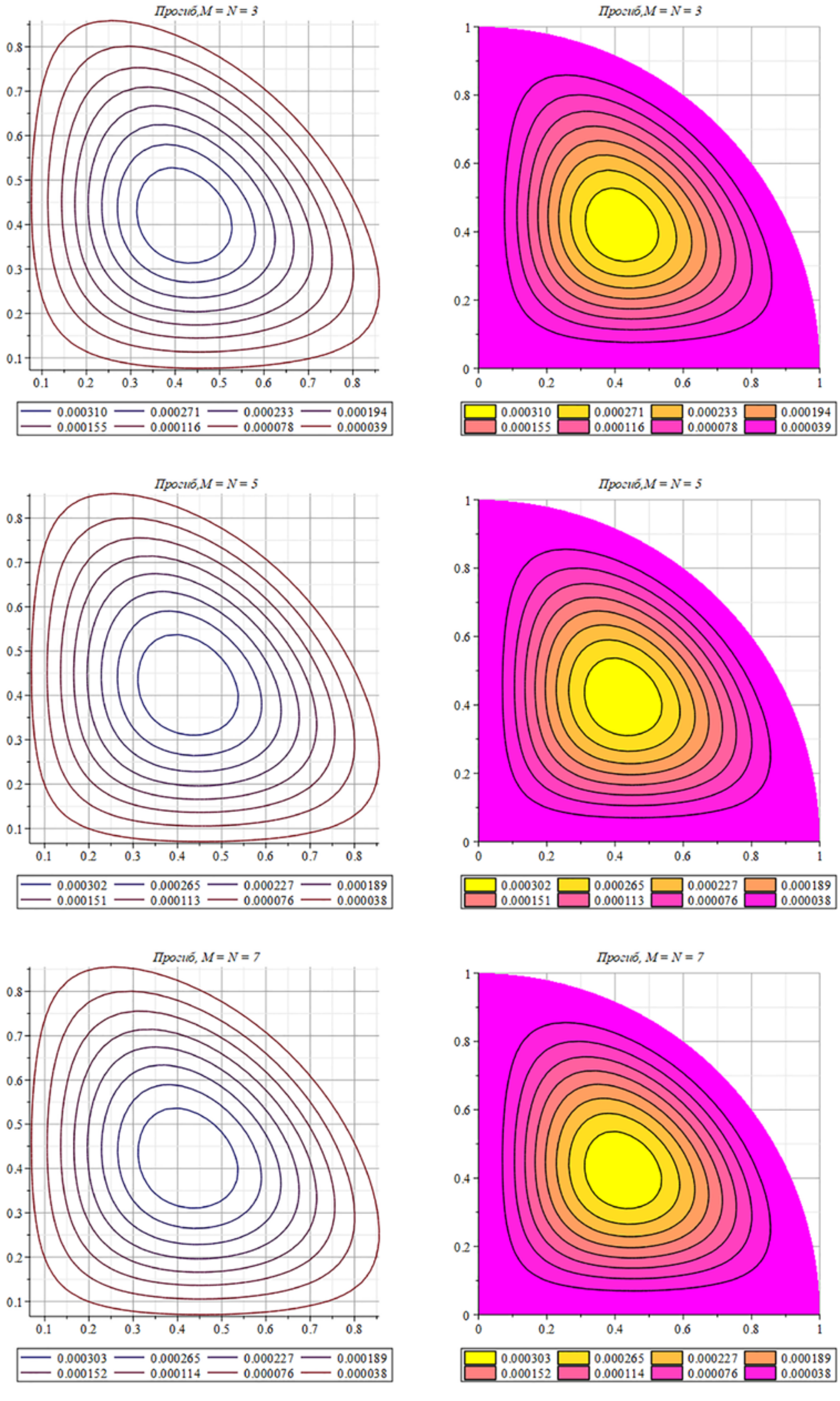
Прогиб,M = N = 3
0.000310 0.000271 0.000233 0.000194
0.000155 0.000116 0.000078 0.000039
Прогиб,M = N = 3
0.000310 0.000271 0.000233 0.000194
0.000155 0.000116 0.000078 0.000039
Прогиб,M = N = 5
0.000302 0.000265 0.000227 0.000189
0.000151 0.000113 0.000076 0.000038
Прогиб,M = N = 5
0.000302 0.000265 0.000227 0.000189
0.000151 0.000113 0.000076 0.000038
Прогиб, M = N = 7
0.000303 0.000265 0.000227 0.000189
0.000152 0.000114 0.000076 0.000038
Прогиб, M = N = 7
0.000303 0.000265 0.000227 0.000189
0.000152 0.000114 0.000076 0.000038

Рис. 2. Прогиб

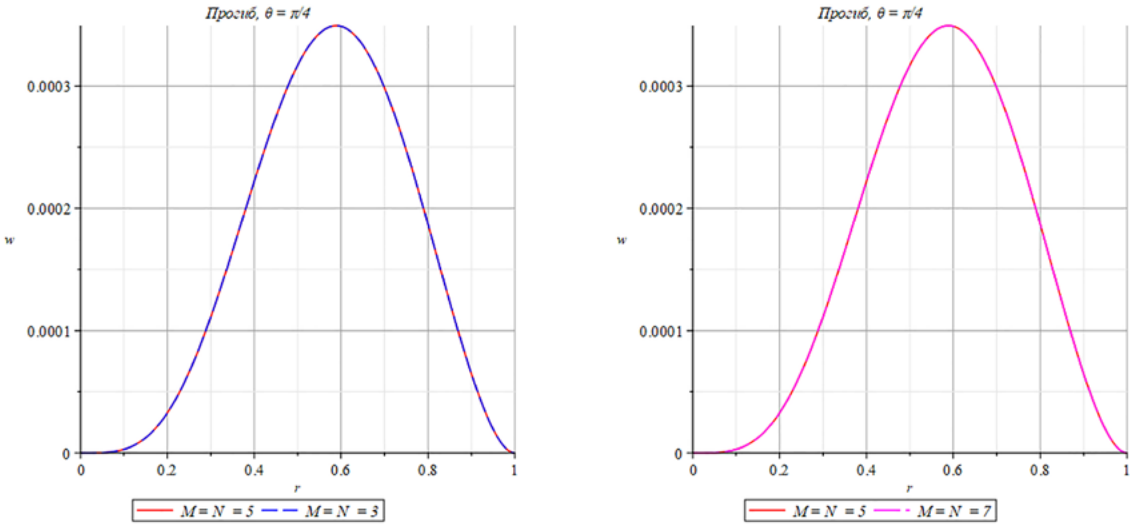

Рис. 3. Прогиб в сечении $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

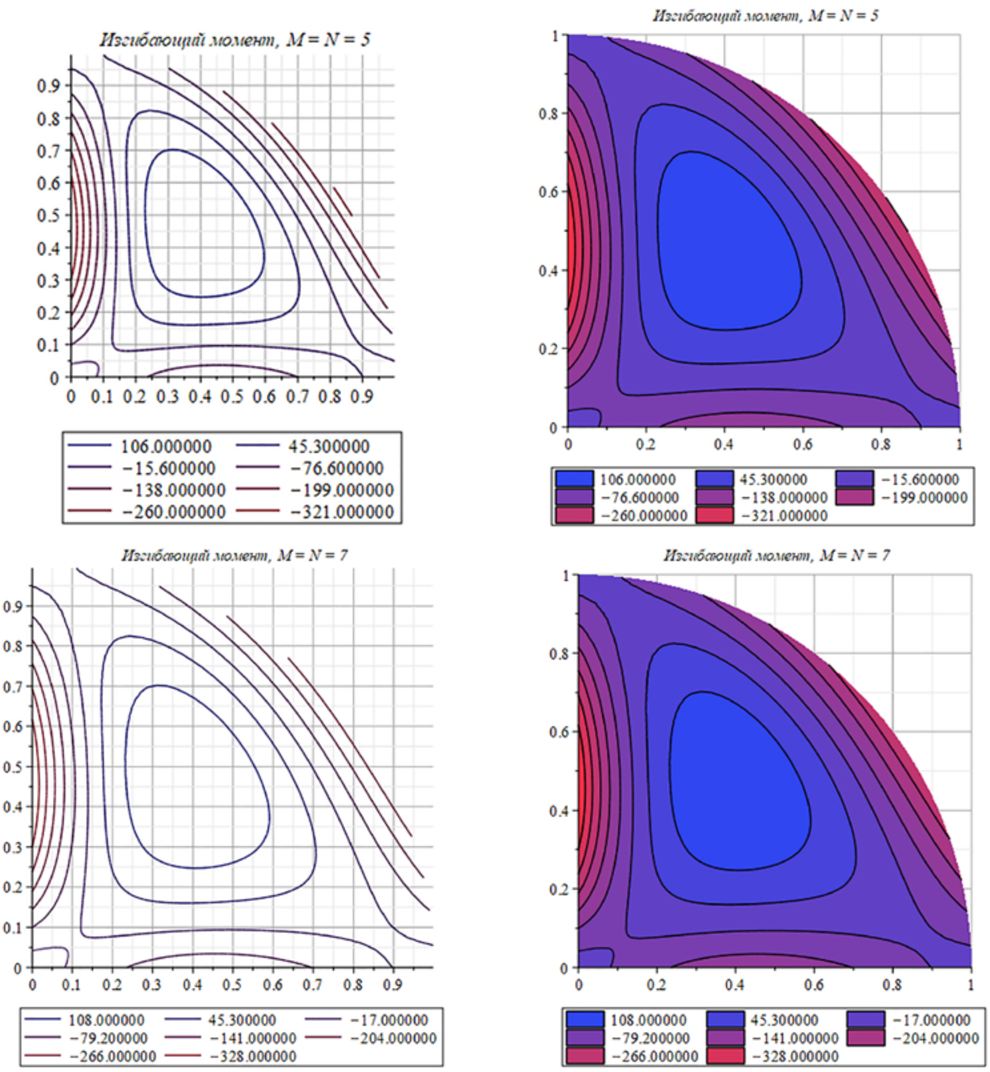

Рис. 4. Радиальный изгибающий момент

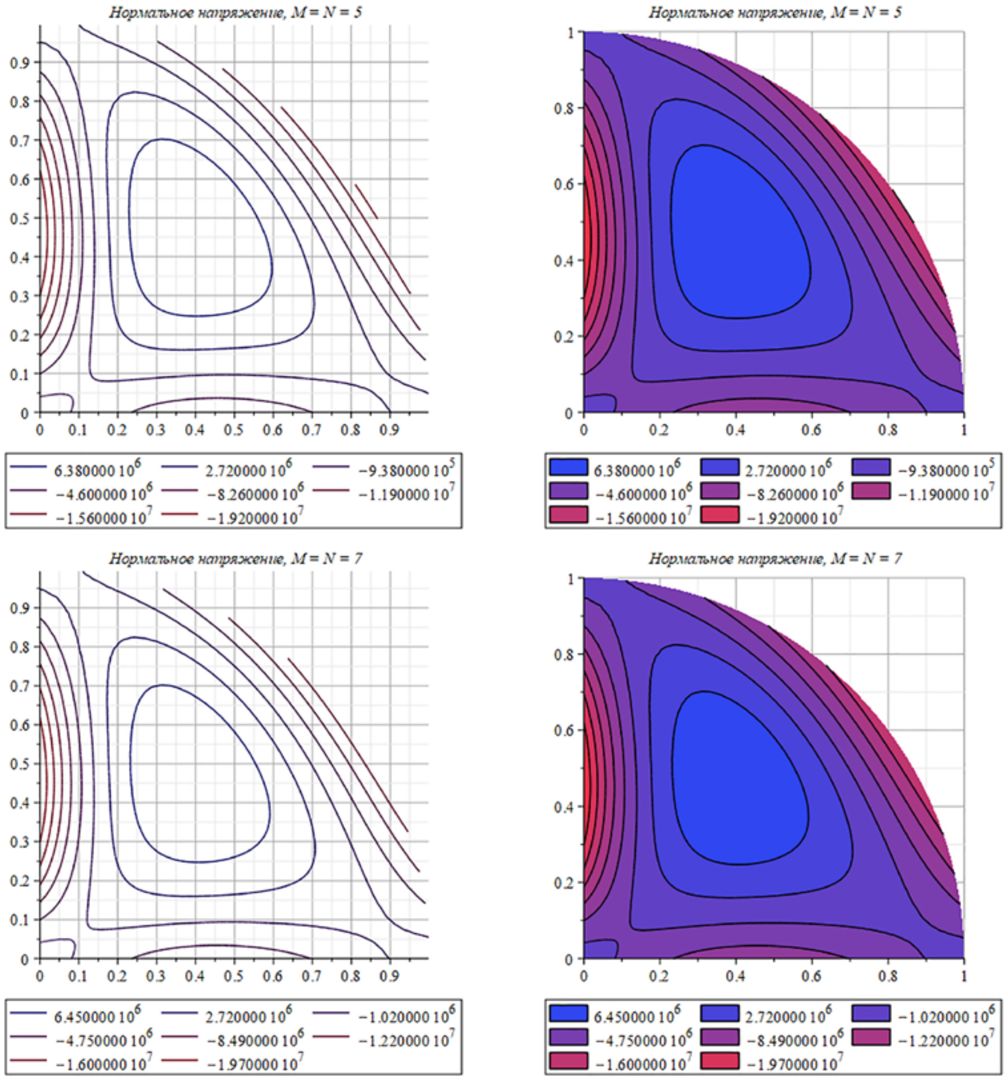

Рис. 5. Максимальное радиальное нормальное напряжение

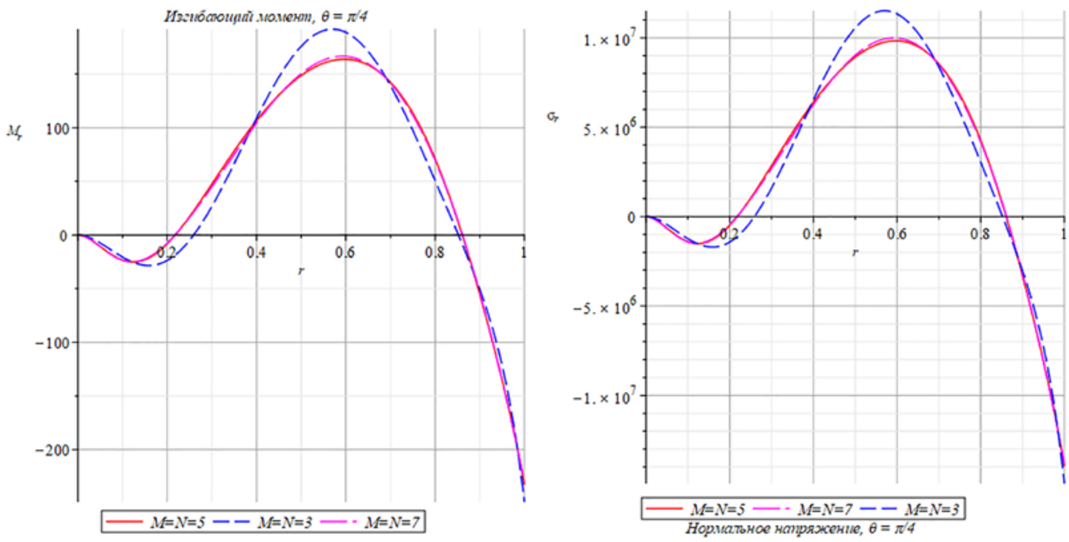

Рис. 6. Радиальный изгибающий момент и максимальное радиальное нормальное напряжение в сечении $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

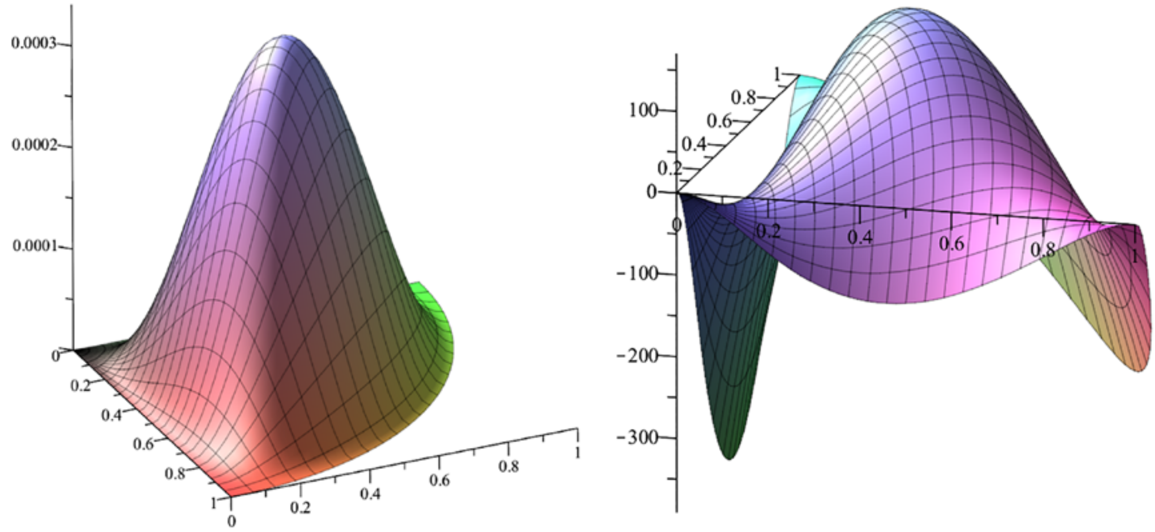

Рис. 7. Эпюра прогиба при $M = N = 5$ и эпюра радиального изгибающего момента при $M = N = 7$

Эпюры радиального максимального нормального напряжения в форме контурных линий (рис. 5).

Эпюры радиального изгибающего момента и максимального радиального нормального напряжения в центральном сечении при $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ (рис. 6).

Сравнение результатов (рис. 4–6) при различных значениях M и N показывает, что для вычисления изгибающего момента и максимального нормального напряжения достаточно ограничиться в формуле (4) значениями $M = N = 5$.

Пространственные эпюры прогиба и радиального изгибающего момента показаны на рис. 7.

Заключение

Численные расчеты показывают достаточно быструю сходимость полученного решения в виде (4): при $M = N = 3$ формула (4) дает хорошее приближение для прогиба. Таким образом, использование решения в виде (4) при $M = N = 3$ оправдано для определения прогибов.

Для вычисления изгибающих моментов и нормальных напряжений, полученных на основе формулы (4), достаточно удерживать $M = N = 5$.

Библиографический список

1. Noor A. K. Computerized symbolic manipulation in structural mechanics-progress and potential / A. K. Noor, C. M. Andersen // Computers and Structures. — 1979. — Iss. 10. — Pp. 95–118.

2. Brumberg V. A. Specialized celestial mechanics systems for symbolic manipulation / V. A. Brumberg, S. V. Tarasevich, N. N. Vasiliev // Celestial Mechanics. — 1989. — Iss. 45. — Pp. 149–162.

3. Pavlovic M. N. Computers and structures: non-numerical applications / M. N. Pavlovic, E. J. Sapountzakis // Computers & Structures. — 1986. — Vol. 24. — Iss. 3. — Pp. 455–474.

4. Eisenberger M. Application of Symbolic Algebra to the Analysis of Plates on Variable Elastic Foundation / M. Eisenberger // Symbolic Computation — 1990. — Iss. 9. — Pp. 207–213.

5. Ye Z. Application of Maple V to the nonlinear vibration analysis of circular plate with variable thickness / Z. Ye // Computers and Structures. — 1999. — Iss. 71. — Pp. 481–488.

6. Pavlovic M. N. Symbolic computation in structural engineering / M. N. Pavlovic // Computers and Structures. — 2003. — Iss. 81. — Pp. 2121–2136.

7. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики / М. Н. Кирсанов. — СПб.: Лань, 2012. — 512 с.

8. Голоскоков Д. П. Построение базиса для одномерных краевых задач в системах символьных вычислений / Д. П. Голоскоков // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2017. — **Вып**. 1. — С. 77–87.

9. Кирсанов М. Н. Математика и программирование в Maple / М. Н. Кирсанов. — М.: IPR MEDIA, 2020. — 164 с.

10. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М.: Наука, 1966.

11. Бубнов И. Г. Труды по теории пластин / И. Г. Бубнов. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955.

12. Голоскоков Д. П. Изгиб ребристой пластины при сложном нагружении / Д. П. Голоскоков, А. В. Матросов // Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2021. — Т. 17. — Вып. 2. — С. 120–130.

13. Голоскоков Д. П. Метод начальных функций в расчете изгиба защемленной по контуру тонкой ортотропной пластинки / Д. П. Голоскоков, А. В. Матросов // Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2021.— Т. 17. — Вып. 4. — С. 330–344.

14. Goloskokov D. P. Bending of clamped orthotropic thin plates: polynomial solution / D. P. Goloskokov, A. V. Matrosov // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2022. — Vol. 27(11). — Pp. 2498–2509. — DOI: 10.1177/10812865221075280.

15. Алцыбеев Г. О. Метод суперпозиции в задаче изгиба защемленной по контуру тонкой изотропной пластинки / Г. О. Алцыбеев, Д. П. Голоскоков, А. В. Матросов // Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2022. — Т.18. — Вып. 3. — С. 347–364.

Дата поступления: 17.03.2023
Решение о публикации: 10.04.2023

Контактная информация:
ГОЛОСКОКОВ Дмитрий Петрович — д-р техн. наук, проф.; dpg1954@mail.ru
МАТРОСОВ Александр Васильевич — д-р физ.-мат. наук, доц.; avmatrosov@mail.ru

Sector Plate Bending: Using Computer Algebra Systems

D. P. Goloskokov[1], A. V. Matrosov[2]

[1]Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, 9, Moskovsky pr., Saint Petersburg, 190031, Russian Federation
[2]St. Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Embankment., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Sector Plate Bending: Using Computer Algebra Systems // *Proceedings of Petersburg Transport University*, 2023, vol. 20, iss. 2, pp. 376–384. (In Russian). DOI: 10.20295/1815-588X-2023-2-376-384

Summary
Purpose: To investigate the stress-strain state of a thin homogeneous isotropic plate in the form of a sector by numerical-analytical method. To consider the possibility of using computer algebra systems (CAS) to calculate sectoral plates operating under bending due to a transverse load. To demonstrate the effectiveness of applying one of these CASs through the example of the Maple system for calculations using the Ritz method — performing analytical transformations when calculating the integral that determines the total potential energy functional, forming and solving the main resolving system of linear algebraic equations with respect to unknown numerical coefficients in the formula approximating the deflection of the plate, visualization of the obtained solution. **Methods:** A direct method is used to solve the variational problem of minimizing the functional of the total potential energy of deformation of a thin homogeneous isotropic plate in the form of a sector — the Ritz method. The solution is constructed in the form of a series in terms of basis functions. As basis functions, polynomial functions are chosen that exactly satisfy all boundary conditions. **Results:** An approximate numerical-analytical solution has been obtained for the problem of bending a sectoral plate in the form of a quarter of a circle, clamped along the contour and loaded with a uniformly distributed load. The effectiveness of using the Maple analytical computing system for solving the problem of bending a sectoral plate by the variational Ritz method is demonstrated. It is shown that the resulting solution quickly converges both for

deflection and for bending moments and stresses. **Practical significance:** The algorithm proposed in the article for solving the problems of bending sectoral plates can be recommended for practical use in determining the stress-strain state of such plates.

Keywords: Sectoral plate, plate bending, plate total potential energy functional, Ritz method, computer algebra systems.

References

1. Noor A. K., Andersen C. M. Computerized symbolic manipulation in structural mechanics-progress and potential. Computers and Structures. 1979, Iss. 10, pp. 95–118.

2. Brumberg V. A., Tarasevich S. V., Vasiliev N. N. Specialized celestial mechanics systems for symbolic manipulation. Celestial Mechanics, 1989, Iss. 45, pp. 149–162.

3. Pavlovic M. N., Sapountzakis E. J. Computers and structures: non-numerical applications. Computers & Structures, 1986, vol. 24, Iss. 3, pp. 455–474.

4. Eisenberger M. Application of Symbolic Algebra to the Analysis of Plates on Variable Elastic Foundation. Symbolic Computation, 1990, Iss. 9, pp. 207–213.

5. Ye Z. Application of Maple V to the nonlinear vibration analysis of circular plate with variable thickness. Computers and Structures, 1999, Iss. 71, pp. 481–488.

6. Pavlovic M. N. Symbolic computation in structural engineering. Computers and Structures, 2003, Iss. 81, pp. 2121–2136.

7. Kirsanov M. N. *Maple i Maplet. Resheniya zadach mekhaniki* [Maple and Maplet. Solving problems of mechanics]. Saint-Petersburg: Lan’ Publ., 2012, 512 p. (In Russian)

8. Goloskokov D. P. Postroenie bazisa dlya odnomernykh kraevykh zadach v sistemakh simvol’nykh vychisleniy [Construction of a basis for one-dimensional boundary value problems in symbolic computing systems]. *Prostranstvo, vremya i fundamental’nye vzaimodeystviya* [Space, time and fundamental interactions]. 2017, Iss. 1, pp. 77–87. (In Russian)

9. Kirsanov M. N. *Matematika i programmirovanie v Maple* [Mathematics and programming in Maple]. Moscow: IPR MEDIA Publ., 2020, 164 p. (In Russian)

10. Timoshenko S. P., Voinovsky-Krieger S. *Plastinki i obolochki* [Plates and shells]. Moscow: Nauka Publ., 1966. (In Russian)

11. Bubnov I. G. *Trudy po teorii plastin* [Works on the theory of plates]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel’stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury Publ., 1955. (In Russian)

12. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Izgib rebristoy plastiny pri slozhnom nagruzhenii [Bending of a ribbed plate under complex loading]. *Vestnik SPbGU. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya* [Bulletin of St. Petersburg State University. Applied Mathematics. Computer science. Management processes]. 2021, vol. 17, Iss. 2, pp. 120–130. (In Russian)

13. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Metod nachal’nykh funktsiy v raschete izgiba zashchemlennoy po konturu tonkoy ortotropnoy plastinki [The method of initial functions in the calculation of the bending of a thin orthotropic plate clamped along the contour]. *Vestnik SPbGU. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya* [Bulletin of St. Petersburg State University. Applied Mathematics. Computer science. Management processes]. 2021, vol. 17, Iss. 4, pp. 330–344. (In Russian)

14. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Bending of clamped orthotropic thin plates: polynomial solution. Mathematics and Mechanics of Solids, 2022, vol. 27(11), pp. 2498–2509. DOI: 10.1177/10812865221075280.

15. Altsybeev G. O., Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Metod superpozitsii v zadache izgiba zashchemlennoy po konturu tonkoy izotropnoy plastinki [Superposition method in the problem of bending a thin isotropic plate clamped along the contour]. *Vestnik SPbGU. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya* [Bulletin of St. Petersburg State University. Applied Mathematics. Computer science. Management processes]. 2022, vol. 18, Iss. 3, pp. 347–364. (In Russian)

Received: March 17, 2023
Accepted: April 10, 2023

Author’s information:

Dmitriy P. GOLOSKOKOV — Dr. Sci. in Engineering, Professor; dpg1954@mail.ru
Alexander V. MATROSOV — Dr. Sci. in Physics and Mathematics; Associate Professor; avmatrosov@mail.ru