

МОДУЛЬНЫЕ КОДЫ С СУММИРОВАНИЕМ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ, ОБРАЗУЮЩЕЙ НАТУРАЛЬНЫЙ РЯД ЧИСЕЛ ЗА ИСКЛЮЧЕНИЕМ СТЕПЕНЕЙ ДВОЙКИ

ЕФАНОВ Дмитрий Викторович, докт. техн. наук, профессор, действительный член Международной академии транспорта, член Института инженеров электротехники и электроники, профессор^{1, 3, 4}, заместитель генерального директора по научно-исследовательской работе²; e-mail: TrES-4b@yandex.ru
ЕЛИНА Есения Игоревна, аспирант¹; e-mail: eseniya-elina@mail.ru

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Институт машиностроения, материалов и транспорта, Высшая школа транспорта, Санкт-Петербург

² Научно-исследовательский и проектный институт «Транспортной и строительной безопасности» (ООО «НИПИ «ТрансСтройбезопасность»), Санкт-Петербург

³ Российский университет транспорта (МИИТ), кафедра «Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте», Москва

⁴ Ташкентский государственный транспортный университет, кафедра «Автоматика и телемеханика», Ташкент

В работе приводятся результаты исследований характеристик модульных взвешенных кодов с суммированием, при построении которых используется последовательность, образованная натуральным рядом чисел, за исключением степеней двойки. Учет изученных характеристик целесообразен при разработке дискретных систем и их диагностического обеспечения. Приведены каталоги рассматриваемых кодов, получаемых при использовании модулей $M=4, 8, 16, 32, 64$. Выбор именно этих модулей обусловлен тем, что при них число проверочных символов в кодовых словах рассматриваемых кодов невелико, что дает возможность внесения наименьшей структурной избыточности при построении дискретных систем и их диагностического обеспечения для получения самопроверяемых, контролепригодных и отказоустойчивых структур. Модульные взвешенные коды с суммированием обнаруживают любые одиночные ошибки при числе информационных символов $m < 3M - \lceil \log_2 3M \rceil$. Показано, что рассматриваемые коды не обнаруживают меньшее количество ошибок, чем широко известные модульные коды с суммированием единичных разрядов (классические модульные коды с суммированием). С увеличением значения модуля выигрыш в общем числе обнаруживаемых модульными взвешенными кодами ошибок существенно возрастает по сравнению с классическими модульными кодами. Модульные взвешенные коды эффективнее обнаруживают разнонаправленные ошибки с четной кратностью в информационных векторах, содержащие группы искажений $\{0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0\}$ (симметричные ошибки), чем классические модульные коды с суммированием. Однако модульные взвешенные коды с суммированием хуже справляются с несимметричными ошибками, возникающими в информационных векторах. В эксперименте с тестовыми комбинационными схемами показано, что модульные взвешенные коды с модулем $M=4$ не обнаруживают большее число ошибок, возникающих на выходах схем, чем классические модульные коды с данным модулем. Несколько лучшими характеристиками обладают модульные взвешенные коды с суммированием с модулем $M=8$. Однако общей рекомендацией является использование модулей, являющихся степенями двойки, начиная со значения $M=16$. Увеличение модуля позволяет увеличить и число обнаруживаемых ошибок на выходах тестовых схем вплоть до 100% покрытия. Модульные взвешенные коды с суммированием с последовательностью весовых коэффициентов, образующей натуральный ряд чисел за исключением степеней двойки, могут эффективно использоваться при разработке дискретных систем и их диагностического обеспечения.

Ключевые слова: системы технического диагностирования дискретных устройств, модульные взвешенные коды с суммированием, последовательность весовых коэффициентов, натуральный ряд без степеней двойки

DOI: 10.20295/2412-9186-2024-10-03-296-330

▼ Введение

При разработке блоков и компонентов дискретных систем часто исходят из требований оперативного обнаружения, возникающих в процессе их эксплуатации неисправностей и ошибок в вычислениях [1–4]. Это необходимо для исключения накопления неисправностей, что особенно актуально в тех случаях, когда устройства используются в системах критического применения в условиях редко меняющихся входных воздействий (например, в космических и военных системах, в системах управления в атомной промышленности и на железнодорожном транспорте) [5, 6]. В таких системах и условиях их применения вовремя не обнаруженная неисправность может послужить источником нарушения свойства их готовности и невозможности выполнения своих функций в требуемый момент времени, а в худшем случае — причиной аварии или катастрофы. Поэтому весьма актуальным становится использование подходов именно к обнаружению неисправностей и их проявлений в дискретных системах, а не только маскировка или коррекция ошибок [7, 8].

При разработке дискретных систем для своевременного обнаружения неисправностей и наделения структур блоков и компонентов свойствами самопроверяемости, контролепригодности и отказоустойчивости широко применяются двоичные избыточные коды [9–14]. Причем именно для обнаружения неисправностей, а не коррекции их проявлений между узлами систем часто используют коды, ориентированные на обнаружение ошибок, а не на их исправление [15, 16]. При построении таких кодов требуется обеспечивать меньшее расстояние Хэмминга между используемыми кодовыми словами и, следовательно, может быть достигнута меньшая избыточность, чем при построении кодов, направленных на коррекцию ошибок [17].

Одним из способов построения кодов с малой избыточностью является использование подсчета числа значащих разрядов информационных векторов по заданному модулю. Например, повсеместно применяются коды паритета, имеющие всего один проверочный символ и контролирующие четность/нечетность получаемой суммы [18, 19]. При их построении

осуществляется счет по модулю $M = 2$. Хорошо известны и другие модульные коды, например, модульные коды со счетом по модулям $M = 4, 8$ и 12, часто называемые кодами Боуза — Лина [20]. В [21–24] исследованы свойства кодов с суммированием значащих разрядов информационных векторов в кольце вычетов по заданному модулю. Важными с точки зрения построения самопроверяемых структур являются такие модульные коды с суммированием, которые строятся с использованием модулей $M \in \{2^1, 2^2, \dots, 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}, 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil}\}$, где m — число информационных символов. У таких кодов хотя бы единожды для полного множества информационных векторов формируются все 2^k , где k — число проверочных символов, контрольных вектора. Такое свойство позволяет довольно просто обеспечивать самопроверяемость детекторов, кодеров, декодеров и тестеров кодов. При использовании же модулей $M \notin \{2^1, 2^2, \dots, 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}, 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil}\}$ формирование полного множества контрольных векторов с k -разрядами становится невозможным.

В [21, 23] показано, что модульные коды с суммированием значащих разрядов не обнаруживают существенное количество ошибок в информационных векторах. По общему числу необнаруживаемых ошибок такие коды не являются оптимальными для своих значений m и k . В [25] доказано, что оптимальные коды по критерию минимума числа необнаруживаемых ошибок для заданных m и k имеют равномерное распределение всех 2^m информационных векторов между всеми 2^k контрольными векторами, а общее число не обнаруживаемых ими ошибок в информационных векторах рассчитывается по формуле: $N_{m,k}^{\min} = 2^m (2^{m-k} - 1)$.

Более близкие к оптимальным коды (и в том числе оптимальные) можно построить при установлении неравноправия между разрядами информационных векторов. Это делается путем взвешивания разрядов или групп разрядов информационного вектора натуральными числами и подсчете не количества значащих разрядов, а суммы их весовых коэффициентов в кольце вычетов по определенному модулю [26]. Такой способ предложен еще Дж. М. Бергером в статье [27], в которой описан и его классический код с суммированием единичных

разрядов, хорошо известный во всем мире. Бергер для взвешивания разрядов использовал последовательность, образованную возрастающими натуральными числами, за исключением чисел, равных степени двойки. Это последовательность A057716 в энциклопедии последовательностей Н. Дж. А. Слоана [28]. Бергер исключил степени двойки из натурального ряда, для того чтобы придать коду свойство обнаружения любых двукратных ошибок в кодовых словах. При таком способе построения двукратные ошибки, возникающие как в информационных, так и в проверочных символах кодовых слов, никак не компенсируются. В [29] при построении кода используется последовательность, образованная натуральным рядом (последовательность A000027 в энциклопедии Слоана). Могут использоваться и иные последовательности для построения взвешенных кодов. Например, тот же Дж. М. Бергер в [30] для обнаружения пачек ошибок в разрядах использовал последовательность возрастающих степеней двойки (последовательность A000079 в энциклопедии Слоана). Могут использоваться и числа, в какие-либо последовательности не входящие. Например, в [31] весовые коэффициенты при построении кода для обнаружения ошибок на выходах схем подбирались специальным образом, что обеспечивало в различных случаях различные покрытия ошибок на выходах тестовых схем.

Коды, строящиеся путем определения суммы весовых коэффициентов и записи в контрольный вектор получаемых чисел, обладают высокой избыточностью (можно обратить внимание на код из той же статьи [27]). Поэтому их использование в задачах построения дискретных систем ограничено. Однако могут строиться модульные взвешенные коды с суммированием [32]. Тем не менее также существуют ограничения на построение таких кодов со свойством обнаружения любых одиночных ошибок в информационных векторах (со свойством помехозащищенности): требуется в последовательности исключить числа, кратные значению модуля M [16]. Например, при использовании последовательности A000027 помехозащищенные коды строятся только для случая $m < M$, а при использовании последовательности A057716 — для слу-

чаев $m < 3M - \lceil \log_2 3M \rceil$ [33, 34]. Из последнего следует, что число помехозащищенных модульных взвешенных кодов с последовательностью A057716 гораздо выше числа таких кодов, строящихся при использовании последовательности A000027.

В данной статье освещаются результаты исследований характеристик модульных взвешенных кодов с суммированием, при построении которых используется последовательность A057716. Как оказалось, в научной литературе такие коды практически не исследованы, хотя могут эффективно применяться для построения дискретных систем, что мы и покажем в настоящей статье.

1. Код с суммированием весовых коэффициентов

Опишем подробнее, как строятся рассматриваемые коды. Выбирается последовательность A057716: 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17... Она приписывается информационным разрядам по мере возрастания номеров их позиций в информационном векторе. Далее для каждого информационного вектора подсчитывается сумма весовых коэффициентов w_i , $i = \overline{1, m}$: $W = \sum_{i=1}^m w_i y_i$, где $y_i \in \{0, 1\}$ — значение i -го разряда информационного вектора. Затем определяется наименьший неотрицательный вычет числа W по модулю $M \in \{2^1, 2^2, \dots, 2^{\lceil \log_2 (W_{\max} + 1) \rceil - 1}, 2^{\lceil \log_2 (W_{\max} + 1) \rceil}\}$, $W_{\max} = \sum_{i=1}^m w_i$. Полученное число представляется в двоичном виде и записывается в разряды контрольного вектора.

Введем обозначение рассматриваемого класса кодов — $WS(m, k, M)$. Будем также указывать последовательность, примененную при построении кода. В нашем случае это A057716.

Для примера получим контрольный вектор $WS(12, 3, 8)$ для информационного вектора $\langle 010010111011 \rangle$.

Определим число W :

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^{m=12} w_i y_i = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + \\ &+ 10 \cdot 1 + 11 \cdot 0 + 12 \cdot 1 + 13 \cdot 0 + 14 \cdot 0 + 15 \cdot 1 + 17 \cdot 0 = \\ &= 3 + 5 + 7 + 9 + 10 + 12 + 15 = 61. \end{aligned}$$

Определим наименьший неотрицательный вычет числа W по модулю $M = 8$:

$$W_8 = W \pmod{8} = 61 \pmod{8} = 5.$$

Полученное значение вычета представляем в двоичном виде и записываем в разряды контрольного вектора: $\langle g_3, g_2, g_1 \rangle = \langle 101 \rangle$.

Отметим, что некоторые исследования $WS(m, k, M)$ -кодов с последовательностью A057716 велись ранее. Например, в [35] исследованы свойства $WS(m, k, M)$ -кодов с последовательностью A057716, при построении которых используется модуль $M = W_{\max} + 1$, а в [36] предложен и исследован взвешенный код с модулем классического кода Бергера $M = 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil}$. $WS(m, k, M)$ -коды с меньшими значениями модулей изучались, например, в [33, 34], где установлено число информационных символов для каждого значения M , для которого строится помехозащищенный $WS(m, k, M)$ -код: $m < 3M - \lceil \log_2 3M \rceil$. Детального исследования характеристик обнаружения ошибок данными кодами не производилось. Не исследовались (по крайней мере авторы настоящей статьи не нашли в литературе даже их упоминания) $WS(m, k, M)$ -коды с последовательностью A057716 и с произвольными значениями модулей.

Далее будем сравнивать характеристики взвешенных кодов с суммированием с характеристиками классических невзвешенных модульных кодов. По сути, эти коды являются также взвешенными, но весовыми коэффициентами из последовательности единиц. Эта последовательность имеет идентификатор A000012 в энциклопедии Слоана. Соответственно, их будем обозначать также $WS(m, k, M)$ кодами, указывая идентификатор A000012.

2. Характеристики обнаружения ошибок в информационных векторах модульными взвешенными кодами с суммированием

Характеристики обнаружения ошибок в информационных векторах разделимыми блоковыми кодами определяют и свойства обнаружения ошибок в дискретных системах, в которых информационный вектор формируется на выходах контролируемой подсистемы

(объекта диагностирования), а контрольный вычисляется дополнительными устройствами, имеющими физическое разделение с объектом диагностирования. Поэтому исследования свойств обнаружения ошибок $WS(m, k, M)$ -кодами в информационных векторах весьма актуальны. От особенностей обнаружения ошибок $WS(m, k, M)$ -кодами будут зависеть и методы синтеза дискретных систем с самопроверяемыми, контролепригодными и отказоустойчивыми структурами.

Для исследования характеристик обнаружения ошибок разделимыми блоковыми кодами требуется классифицировать все информационные векторы на группы, соответствующие контрольным векторам. Такой способ анализа предложен в [37]. Тогда путем сравнения информационных векторов, принадлежащих одной и той же контрольной группе, можно определить количество и виды не обнаруживаемых кодом ошибок в информационных векторах. Автоматизируя процесс анализа и рассчитывая характеристики обнаружения ошибок в информационных векторах $WS(m, k, M)$ -кодами, авторы исследования получили характеристические таблицы, являющиеся базовыми для выбора способа построения дискретного устройства или системы с заданными свойствами структур. В табл. 1–5 приведены фрагменты характеристических таблиц, где даны распределения необнаруживаемых ошибок по их кратностям и видам (это абсолютные показатели обнаружения ошибок $WS(m, k, M)$ -кодами в информационных векторах).

Отметим, что для практических задач синтеза дискретных систем важно знать не только классификацию необнаруживаемых (или обнаруживаемых, что равнозначно) ошибок по числу искажаемых разрядов (кратности), но и по числу искажаемых 0 и 1 в информационных векторах. Классификация ошибок, учитываемая при разработке дискретных систем и их диагностического обеспечения, приведена в [38]. Выделяют монотонные, симметричные и асимметричные ошибки. К монотонным относятся однонаправленные ошибки (содержат искажения только вида $0 \rightarrow 1$ или $1 \rightarrow 0$). К симметричным относятся ошибки, содержащие целое количество групп разнонаправленных искажений $\{0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0\}$.

К асимметричным ошибкам относятся ошибки, связанные с возникновением неравного количества искажений видов $0 \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow 0$. Распределения ошибок по кратностям и видам позволяют выбрать наиболее эффективный метод синтеза структур устройств, наделенных требуемыми свойствами.

Анализ характеристических таблиц позволяет выделить характерные $WS(m, k, M)$ -кодам с рассматриваемой последовательностью весовых коэффициентов A057716 свойства. Приведем наиболее важные для задач синтеза дискретных систем из них.

Свойство 1. Не существует помехозащищенных $WS(m, 1, 2)$ -кодов с последовательностью весовых коэффициентов A057716.

Это свойство объясняется тем, что третий член последовательности A057716 кратен значению модуля — $6 \pmod{2} = 0$. Поэтому как минимум искажения третьего взвешенного разряда не будут обнаруживаться.

Свойство 2. Помехозащищенные $WS(m, k, M)$ -коды с последовательностью A057716 строятся при условии: $m < 3M - \lceil \log_2 3M \rceil$.

Данное свойство объяснено в [33, 34] и также связано с последовательностью A057716.

Свойство 3. С увеличением значения модуля $M \in \left\{ 2^1, 2^2, \dots, 2^{\lceil \log_2 (W_{\max} + 1) \rceil - 1}, 2^{\lceil \log_2 (W_{\max} + 1) \rceil} \right\}$, $W_{\max} = \sum_{i=1}^m w_i$ кратности не обнаруживаемых $WS(m, k, M)$ -кодами ошибок увеличиваются.

В действительности увеличение значения модуля и выбор его из множества степеней двойки приводят к росту числа контрольных векторов, между которыми распределяются информационные векторы. При этом становится гораздо меньше векторов с одинаковыми суммарными весами, а ввиду увеличения значения модуля увеличивается расстояние Хэмминга между ними. Поэтому происходит смещение числа необнаруживаемых ошибок в сторону большей их кратности.

Следующие две закономерности весьма важны для выбора способа синтеза дискретного устройства со свойствами самопроверяемости структур.

Свойство 4. $WS(m, 5, 32)$ -коды с последовательностью весовых коэффициентов A057716 обнаруживают любые однократные и двукратные ошибки в диапазоне длин информационных векторов $m = 6 \dots 11$.

Свойство 5. $WS(m, 6, 64)$ -коды с последовательностью весовых коэффициентов A057716 обнаруживают любые однократные и двукратные ошибки в диапазоне длин информационных векторов $m = 7 \dots 20$.

Свойства 4 и 5 позволяют использовать $WS(m, k, M)$ -коды при построении структур с обнаружением любых неисправностей по группам H^1 - и H^2 -независимых выходов (группам выходов, допускающих исключительно одиночные ошибки [10, 18], и по группам, допускающим возникновение одно- и двукратных искажений [39, 40]).

В табл. 1–5 ввиду громоздкости исходных характеристических таблиц не приведены распределения числа необнаруживаемых ошибок по видам с различной кратностью. Однако могут оказаться полезными следующие свойства $WS(m, k, M)$ -кодов, связанные с обнаружением ошибок одного и того же вида, но с различной их кратностью.

Свойство 6. $WS(m, 3, 8)$ -коды с последовательностью весовых коэффициентов A057716 обнаруживают любые двукратные симметричные ошибки в информационных векторах в диапазоне $m = 4 \dots 6$.

Свойство 7. $WS(m, 4, 16)$ -коды с последовательностью весовых коэффициентов A057716 обнаруживают любые двукратные симметричные ошибки в информационных векторах в диапазоне $m = 5 \dots 13$.

Свойство 8. $WS(m, 5, 32)$ -коды с последовательностью весовых коэффициентов A057716 обнаруживают любые двукратные симметричные ошибки в информационных векторах в диапазоне $m = 6 \dots 20$. Кроме того, данные коды обнаруживают любые двукратные монотонные ошибки в информационных векторах в диапазоне $m = 6 \dots 11$ и любые трехкратные монотонные ошибки в информационных векторах при $m = 6, 7$.

Таблица 1. Характеристика не обнаруживаемых ошибок WS(m, 2, 4)-кодами с последовательностью весовых коэффициентов A057716

m	N _{m, k} ^{min}	Общее число обнаруживаемых ошибок		Распределение обнаруживаемых ошибок по видам				Распределение необнаруживаемых ошибок по кратностям, d					
		необнаруживаемых		Симметричные		Асимметричные		1	2	3	4	5	≥ 6
		Монотонные	Симметричные	Асимметричные	1	2	3	4	5	≥ 6			
4	48	20	8	20	0	24	0	24	24	0	0	0	0
5	224	84	44	96	0	96	0	96	96	16	16	16	0
6	960	266	196	498	0	256	0	256	384	224	64	64	32
7	3968	892	792	2284	0	768	0	768	1280	960	640	640	320
8	16128	2932	2992	10204	256	1536	256	1536	4096	4480	3200	3200	2560
9	65024	9206	11708	44110	512	4352	512	4352	12032	15360	15360	15360	17408
10	261120	27892	45276	187952	1024	10752	1024	10752	33792	53760	61440	61440	100352
11	1046528	85268	174560	786700	2048	27648	2048	27648	92160	164864	229376	229376	530432
12	4190208	259444	672496	3258268	4096	69632	4096	69632	241664	487424	802816	802816	2584576
13	16769024	782774	2592952	13393298	8192	163840	8192	163840	622592	1441792	2588672	2588672	11943936
14	67092480	2362588	10015024	54714868	16384	393216	16384	393216	1572864	3997696	8126464	8126464	52985856
15	268402688	7120532	38749040	222533116	65536	819200	65536	819200	3932160	11141120	24248320	24248320	228196352
16	1073676288	21420778	150210134	902045376	131072	1933312	131072	1933312	9633792	29458432	70909952	70909952	961609728
17	4294836224	64337156	583279516	3647219552	262144	4390912	262144	4390912	23265280	77660160	200867840	200867840	3988389888
18	17179607040	193243300	2268542464	14717821276	524288	10092544	524288	10092544	55705600	198574080	557711360	557711360	16356999168
19	68718952448	580254188	8835822272	59302875988	1572864	21233664	1572864	21233664	131596288	508559360	1512570880	1512570880	66543419392
20	274876858368	1741720204	34460653424	238674484740	3145728	48234496	3145728	48234496	309329920	1265106944	4040163328	4040163328	269210877952

Таблица 2. Характеристика не обнаруживаемых ошибок $WS(m, 3, 8)$ -кодами с последовательностью весовых коэффициентов A057716

m	$N_{m,k}^{min}$	Общее число не обнаруживаемых ошибок	Распределение не обнаруживаемых ошибок по видам			Распределение не обнаруживаемых ошибок по кратностям, d									
		Монотонные	Симметричные	Асимметричные	1	2	3	4	5	≥ 6					
4	16	20	12	0	8	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0
5	96	100	44	8	48	0	48	12	32	48	0	12	8	0	0
6	448	456	154	68	234	0	234	192	96	192	0	120	32	16	0
7	1920	1936	488	336	1112	0	1112	640	320	640	0	496	320	160	0
8	7936	7936	1380	1376	5180	0	5180	2176	640	2176	0	2272	1568	1280	0
9	32256	32256	4516	5620	22120	0	22120	6144	2048	6144	0	7744	7744	8704	0
10	130048	130048	13772	22170	94106	0	94106	17152	5120	17152	0	26752	30848	50176	0
11	522240	522240	42116	86292	393832	0	393832	47616	12288	47616	0	83200	113920	265216	0
12	2093056	2093056	128516	334224	1630316	0	1630316	124928	30720	124928	0	246784	398336	1292288	0
13	8380416	8380416	390420	1292424	6697572	0	6697572	319488	73728	319488	0	727040	1288192	5971968	0
14	33538048	33538048	1179360	4999408	27359280	0	27359280	802816	180224	802816	0	2011136	4050944	26492928	0
15	134184960	134184960	3541948	19358480	111284532	0	111284532	2031616	393216	2031616	0	5562368	12075008	114122752	0
16	536805376	536805376	10680978	75073302	451051096	0	451051096	4915200	950272	4915200	0	14696448	35422208	480821248	0
17	2147352576	2147352576	32109756	291576228	1823666592	0	1823666592	11829248	2162688	11829248	0	38764544	100368384	1994227712	0
18	8589672448	8589672448	96489556	1134141640	7359041252	0	7359041252	28508160	4849664	28508160	0	99287040	278200320	8178827264	0
19	34359214080	34359214080	289992956	4417649068	29651572056	524288	29651572056	66715648	9699328	66715648	524288	255590400	754974720	33271709696	524288
20	137437904896	137437904896	870548476	17229802464	119337553956	1048576	119337553956	156762112	22020096	156762112	1048576	636092416	2016542720	134605438976	1048576

Таблица 4. Характеристика не обнаруживаемых ошибок $WS(m, 5, 32)$ -кодами с последовательностью весовых коэффициентов A057716

m	$N_{m,k}^{min}$	Общее число не обнаруживаемых ошибок		Распределение не обнаруживаемых ошибок по видам			Распределение не обнаруживаемых ошибок по кратностям, d					
		Монотонные	Симметричные	Асимметричные		2	3	4	5	≥ 6		
				Симметричные	Асимметричные							
6	64	8	34	40	0	32	40	8	2			
7	384	56	148	200	0	96	176	96	36			
8	1792	272	592	948	0	384	672	448	308			
9	7680	1012	2228	4456	0	1280	2240	2080	2096			
10	31744	3384	8090	20300	0	3840	7552	8192	12190			
11	129024	10428	28828	89780	0	11264	23040	29312	65420			
12	520192	32904	99608	387700	2048	29696	65536	101120	321812			
13	2088960	99012	356164	1633812	8192	73728	190464	328704	1487900			
14	8372224	299736	1312136	6760392	24576	176128	530432	1043456	6597672			
15	33521664	900580	4945388	27675768	65536	442368	1454080	3080192	28479560			
16	134152192	2686112	18925770	112540374	163840	1048576	3899392	9007104	120033344			
17	536739840	8064600	73088816	455586504	393216	2490368	10272768	25509888	498073680			
18	2147221504	24242012	283705592	1839274012	917504	6094848	26148864	70402048	2043658352			
19	8589410304	72559716	1104417376	7412433308	1835008	15073280	66584576	189792256	8316125280			
20	34358689792	217767788	4307032318	29833889782	4194304	35913728	164233216	507904000	33646444640			

Таблица 5. Характеристика не обнаруживаемых ошибок $WS(m, 6, 64)$ -кодами с последовательностью весовых коэффициентов A057716

m	$N_{m,k}^{min}$	Общее число не обнаруживаемых ошибок		Распределение не обнаруживаемых ошибок по видам			Распределение не обнаруживаемых ошибок по кратностям, d					
		Монотонные	Симметричные	Симметричные	Асимметричные	2	3	4	5	≥ 6		
7	128	0	148	172	0	0	96	128	72	24		
8	768	0	592	688	0	0	320	480	304	176		
9	3584	20	2228	2632	0	0	896	1600	1280	1104		
10	15360	248	8090	10094	0	0	2304	5120	4800	6208		
11	63488	1840	28796	39576	0	0	6144	14848	16512	32708		
12	258048	9824	98430	161900	0	0	16384	39936	53760	160074		
13	1040384	40532	341716	677628	0	0	40960	109568	169472	739876		
14	4177920	146008	1198368	2861220	0	0	98304	292864	526336	3288092		
15	16744448	465104	4238480	12075020	0	0	237568	786432	1548288	14206316		
16	67043328	1396360	15103906	50579176	0	0	557056	2080768	4489216	59952402		
17	268304384	4129352	54207972	209999190	0	0	1277952	5472256	12746752	248839554		
18	1073479680	12210144	195993560	865299480	0	0	3080192	13860864	35209216	1021352912		
19	4294443008	36320212	714417460	3543719128	0	0	7471104	34734080	95191040	4157060576		
20	17178820608	108674472	2627791042	14442361410	0	0	17825792	85721088	254541824	16820738220		

Свойство 9. $WS(m, 6, 64)$ -коды с последовательностью весовых коэффициентов A057716 обнаруживают любые двукратные симметричные ошибки в информационных векторах в диапазоне $m = 7 \dots 20$. Кроме того, данные коды обнаруживают:

- любые двукратные монотонные ошибки в информационных векторах в диапазоне $m = 7 \dots 20$;
- любые трехкратные монотонные ошибки в информационных векторах в диапазоне $m = 7 \dots 17$;
- любые четырехкратные монотонные ошибки в информационных векторах в диапазоне $m = 7 \dots 12$;
- любые пятикратные монотонные ошибки в информационных векторах в диапазоне $m = 7 \dots 10$;
- любые шестикратные монотонные ошибки в информационных векторах в диапазоне $m = 7 \dots 9$;
- любые семикратные монотонные ошибки при $m = 7, 8$;
- любые восьмикратные монотонные ошибки при $m = 8$.

Свойства 6–9 позволяют использовать $WS(m, k, M)$ -коды при контроле групп выходов, допускающих возникновение монотонных ошибок до определенной их кратности, а также симметричных ошибок. Общий подход к контролю таких групп выходов приведен в [40]. Хорошо проработаны методы синтеза устройств с обнаружением неисправностей со свойством выделения групп монотонно независимых выходов и d -монотонно независимых выходов, в которых допустимы монотонные искажения с кратностями менее $d + 1$ [41–45].

Данные таблиц 1–5 дополняются графиками относительных показателей обнаружения ошибок $WS(m, k, M)$ -кодами. На рис. 1, а, 2, а, 3, а, 4, а и 5, а представлены данные по показателю коэффициента эффективности использования проверочных символов — коэффициенту $\xi_m, \%$. Этот коэффициент показывает, насколько код близок к оптимальному по критерию минимума общего числа необнаруживаемых ошибок при заданных значениях m и k [25].

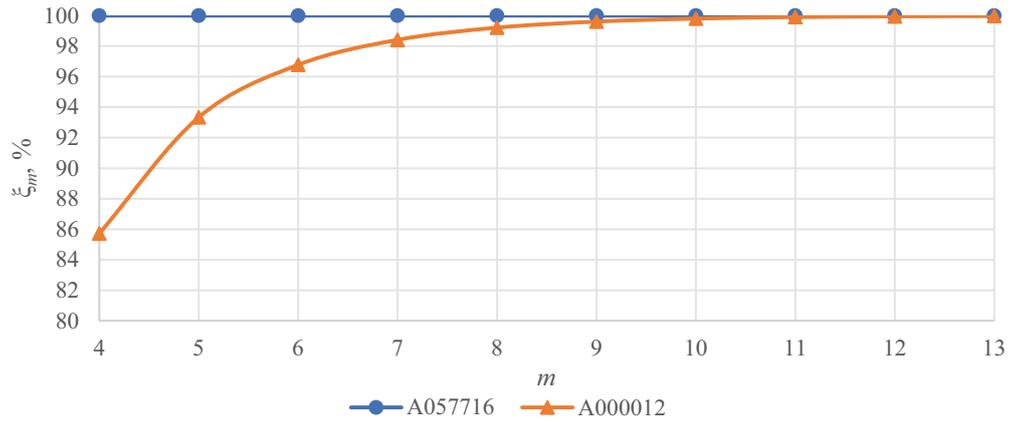
Данные на рис. 1, а, 2, а, 3, а, 4, а и 5, а приведены для $WS(m, k, M)$ -кодов с двумя последовательностями: A000012 и A057716. Классические модульные коды с суммированием, при построении которых используется последовательность A000012, более далеки от оптимальных, чем взвешенные коды с такими же значениями M (при больших значениях m классические модульные коды квазиоптимальны, однако при малых значениях m они далеки и от таковых). Взвешенные же коды с последовательностью A057716 не только более эффективно используют проверочные символы, но и для разных значений M уже при малых, но различных значениях m становятся оптимальными. Интересно, что чем меньше значения M , тем ближе по значениям коэффициента ξ_m являются классические модульные коды и коды с последовательностью A057716 (см. графики на рис. 1, а, 2, а, 3, а, 4, а и 5, а). Анализ характеристических таблиц позволяет установить следующие закономерности, присущие $WS(m, k, M)$ -кодам.

Свойство 10. $WS(m, 3, 8)$ -коды с последовательностью весовых коэффициентов A057716 являются оптимальными по критерию минимума общего числа необнаруживаемых ошибок в информационных векторах при своих m и k при условии $m \geq 8$.

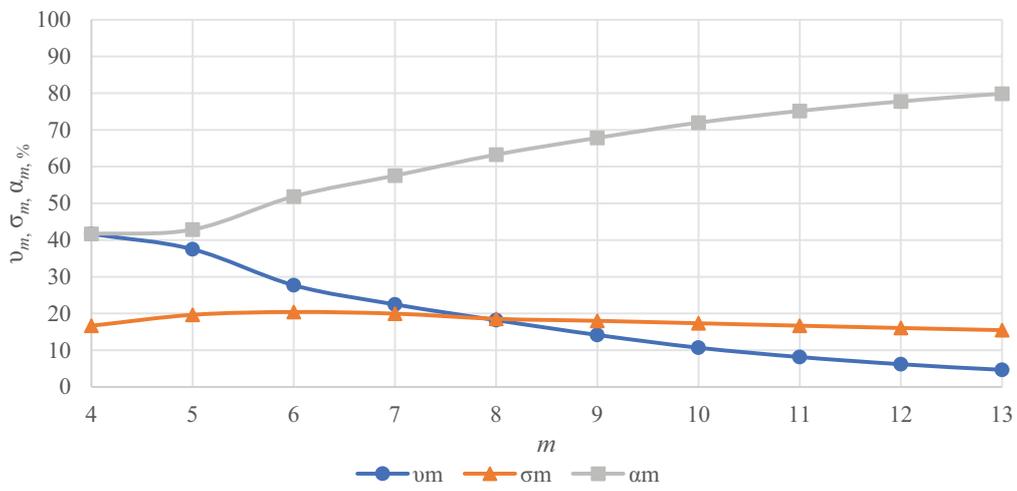
Свойство 11. $WS(m, 4, 16)$ -коды с последовательностью весовых коэффициентов A057716 являются оптимальными по критерию минимума общего числа необнаруживаемых ошибок в информационных векторах при своих m и k при условии $m \geq 13$.

Свойство 12. $WS(m, 5, 32)$ -коды с последовательностью весовых коэффициентов A057716 являются оптимальными по критерию минимума общего числа необнаруживаемых ошибок в информационных векторах при своих m и k при условии $m \geq 14$.

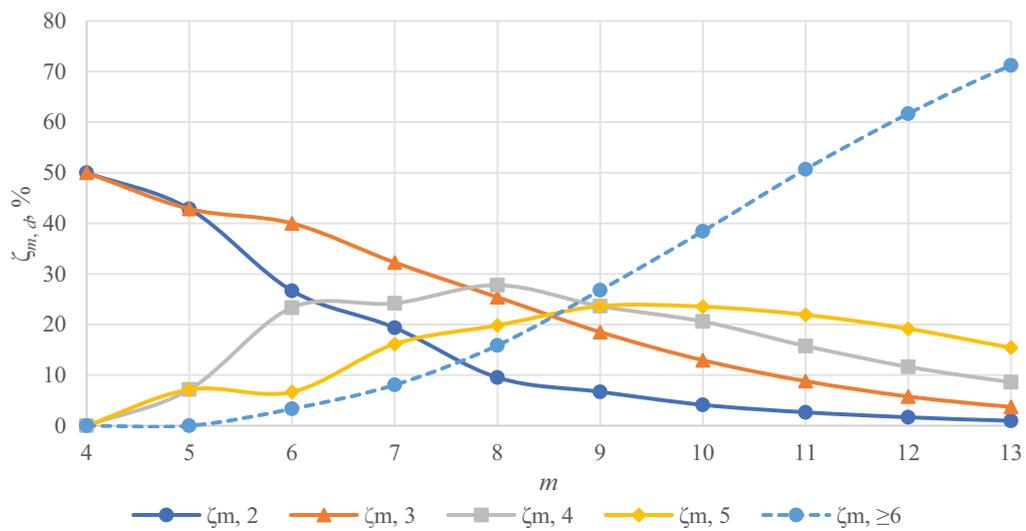
Свойство 13. $WS(m, 5, 32)$ -коды с последовательностью весовых коэффициентов A057716 являются оптимальными по критерию минимума общего числа необнаруживаемых ошибок в информационных векторах при своих m и k при условии $m \geq 19$.



а)



б)



в)

Рис. 1. Зависимости относительных показателей для $WS(m, 2, 4)$ -кодов от m :
 а — ξ_m ; б — $\nu_m, \sigma_m, \alpha_m$; в — $\zeta_{m,d}$

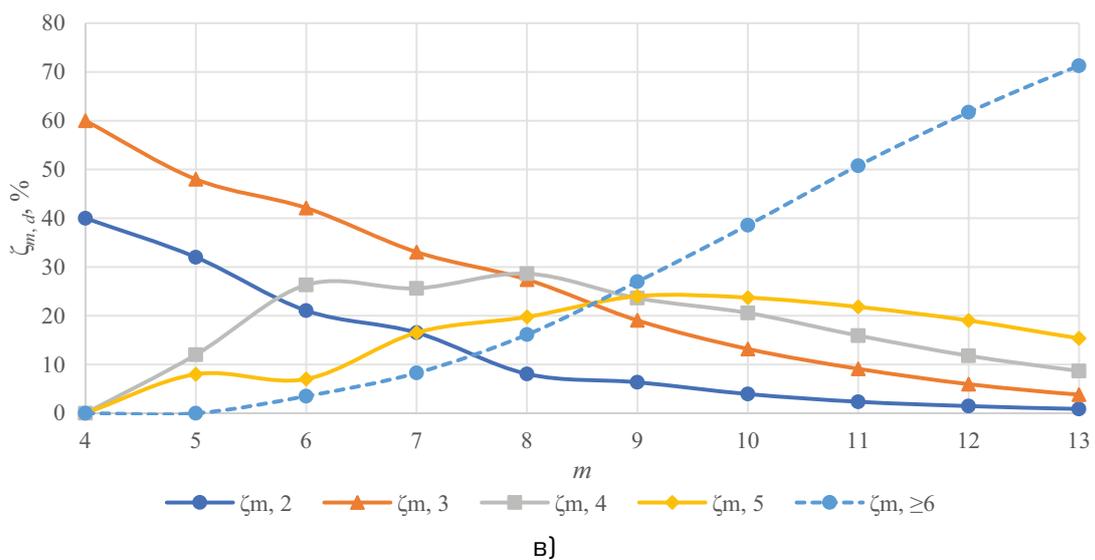
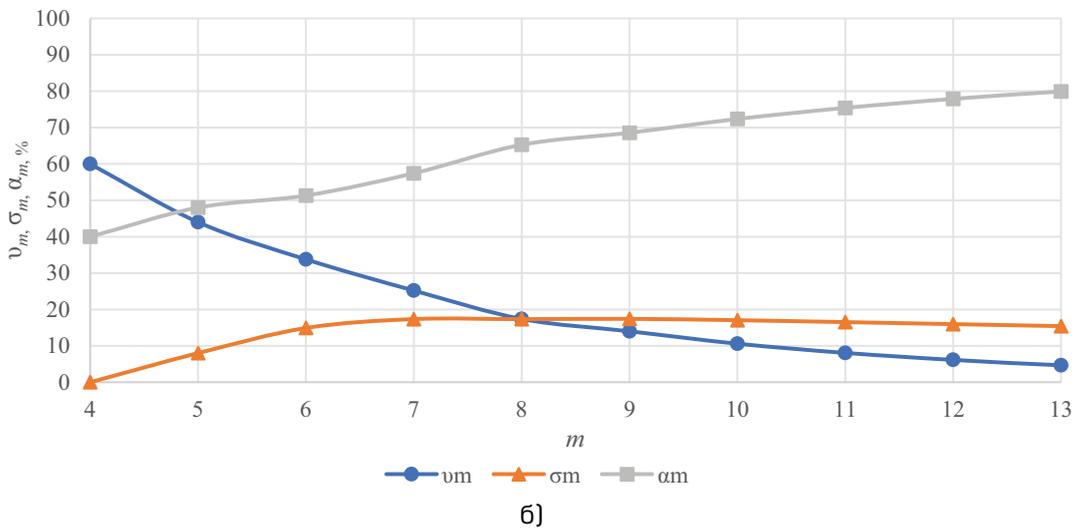
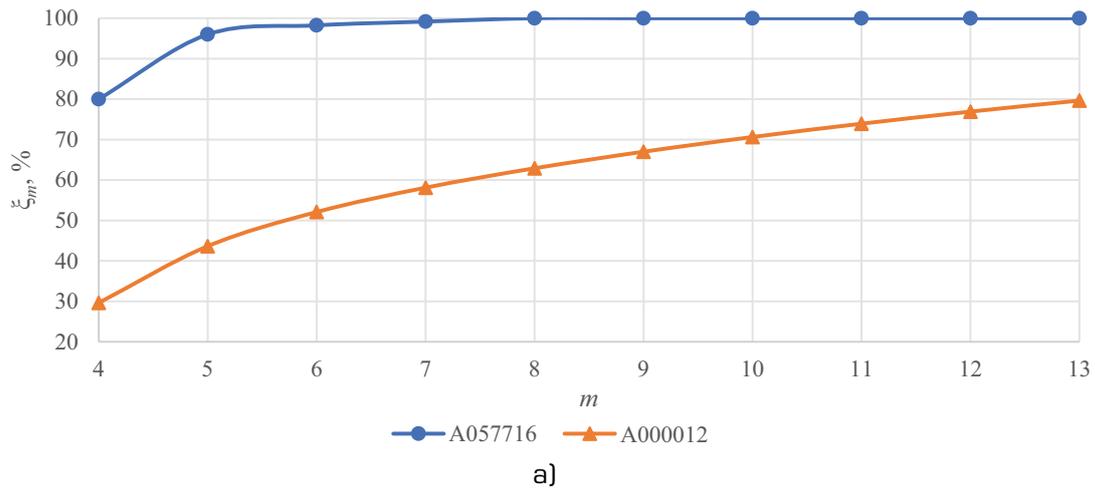


Рис. 2. Зависимости относительных показателей для $WS(m, 3, 8)$ -кодов от m :
 а — ξ_m ; б — $\nu_m, \sigma_m, \alpha_m$; в — $\zeta_{m,d}$

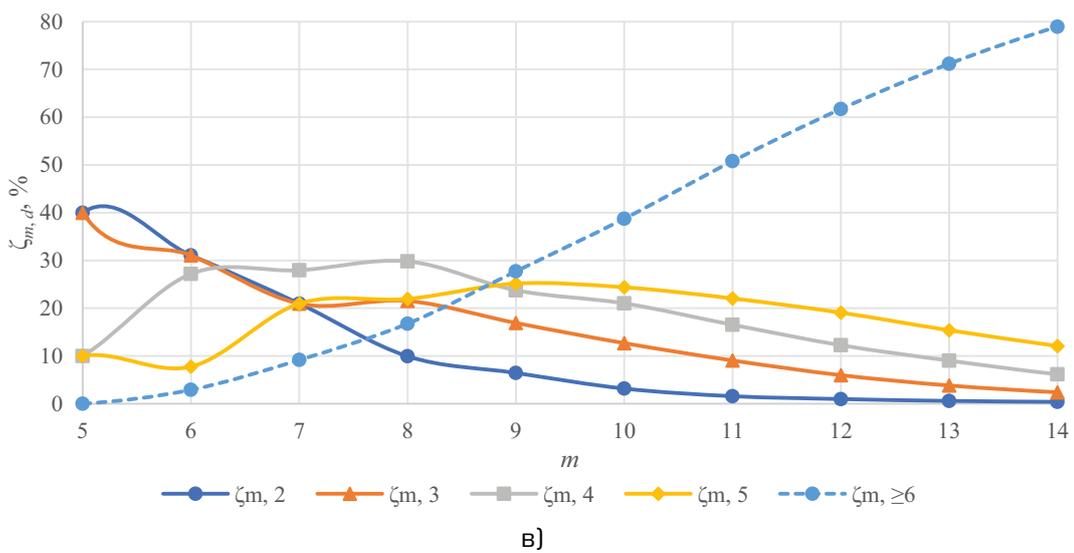
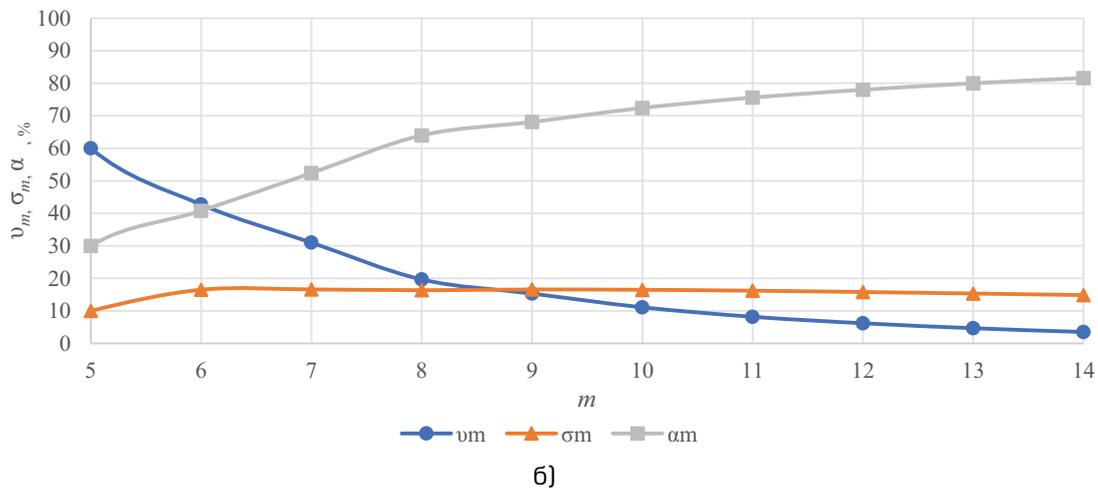
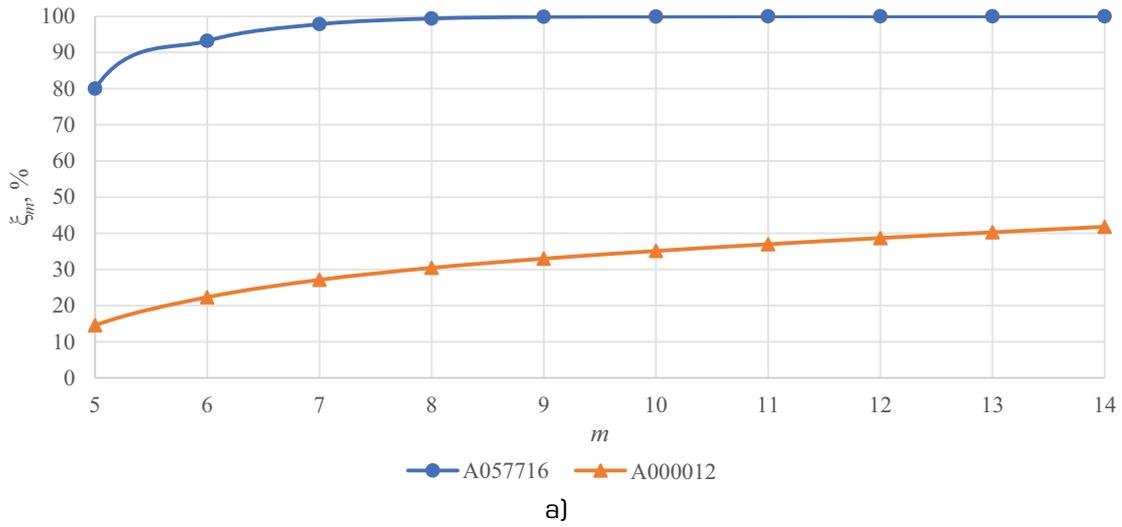


Рис. 3. Зависимости относительных показателей для $WS(m, 4, 16)$ -кодов от m : а — ξ_m ; б — v_m, σ_m, α_m ; в — $\zeta_{m,d}$

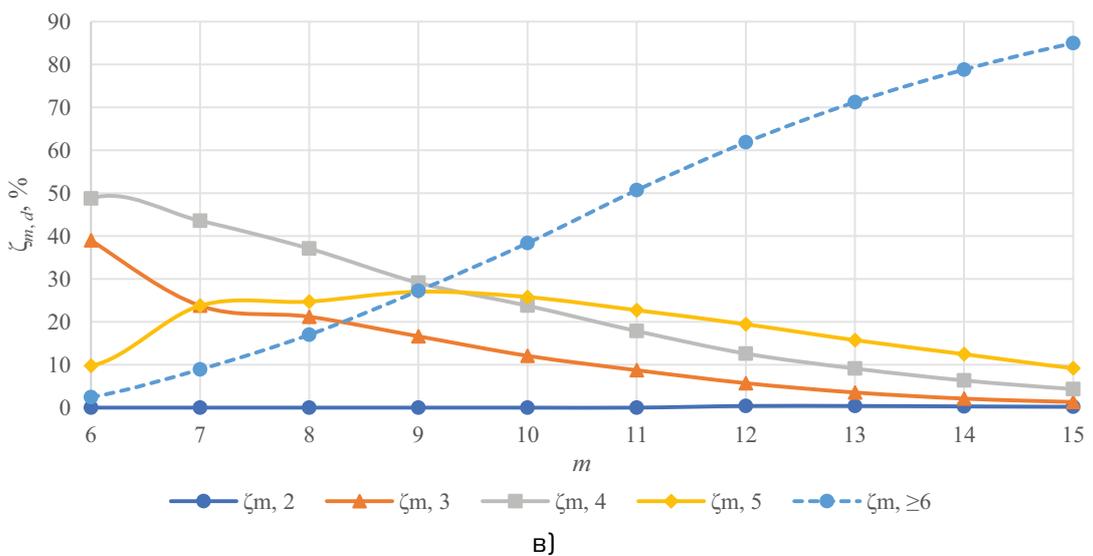
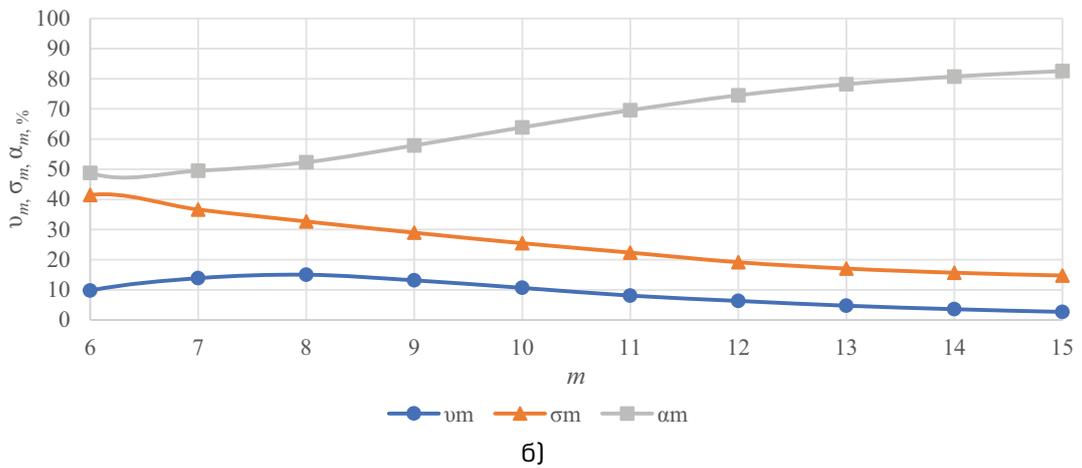
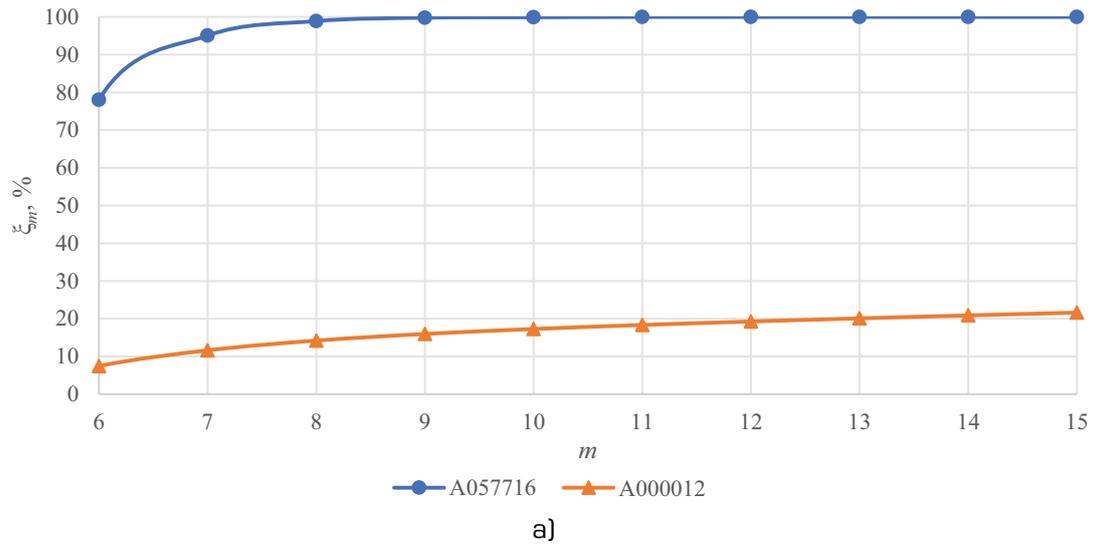


Рис. 4. Зависимости относительных показателей для $WS(m, 5, 32)$ -кодов от m :
 а — ξ_m ; б — $\nu_m, \sigma_m, \alpha_m$; в — $\zeta_{m,d}$

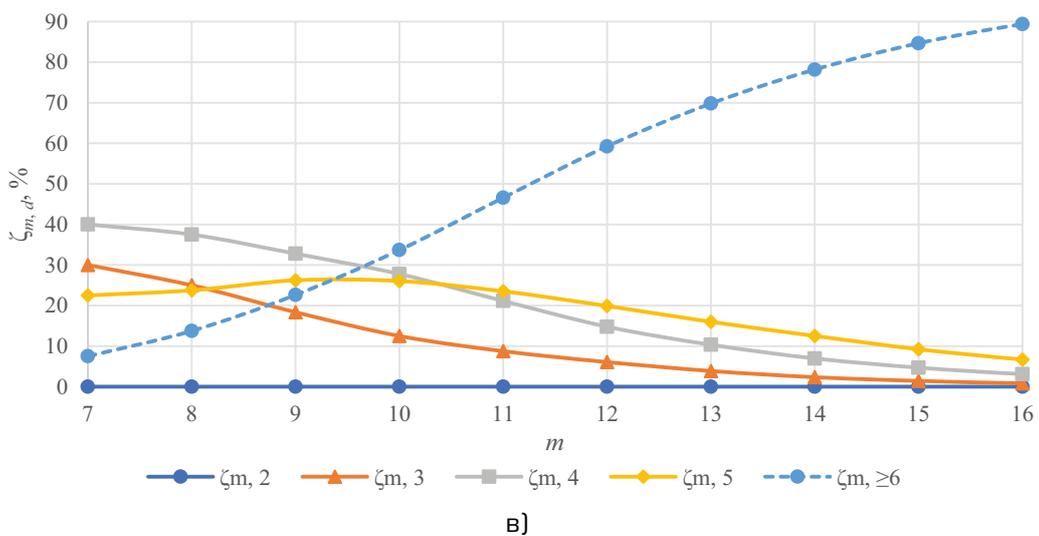
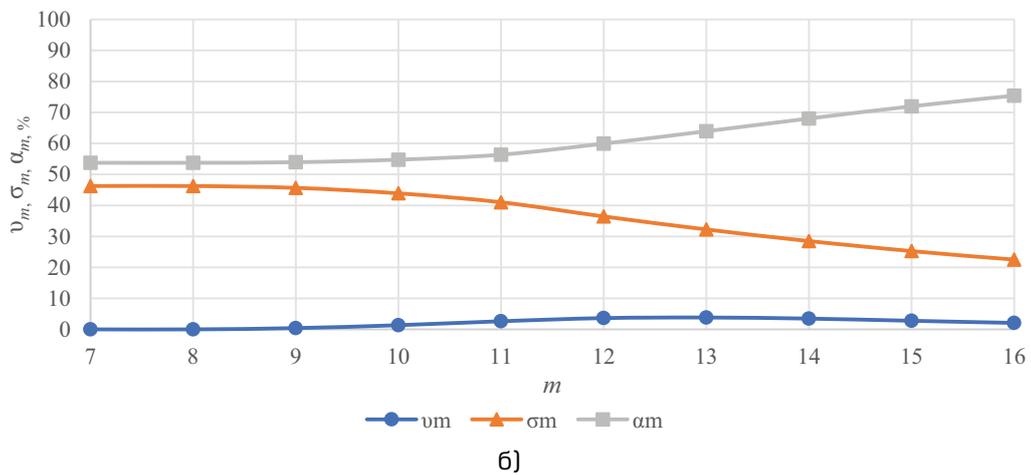
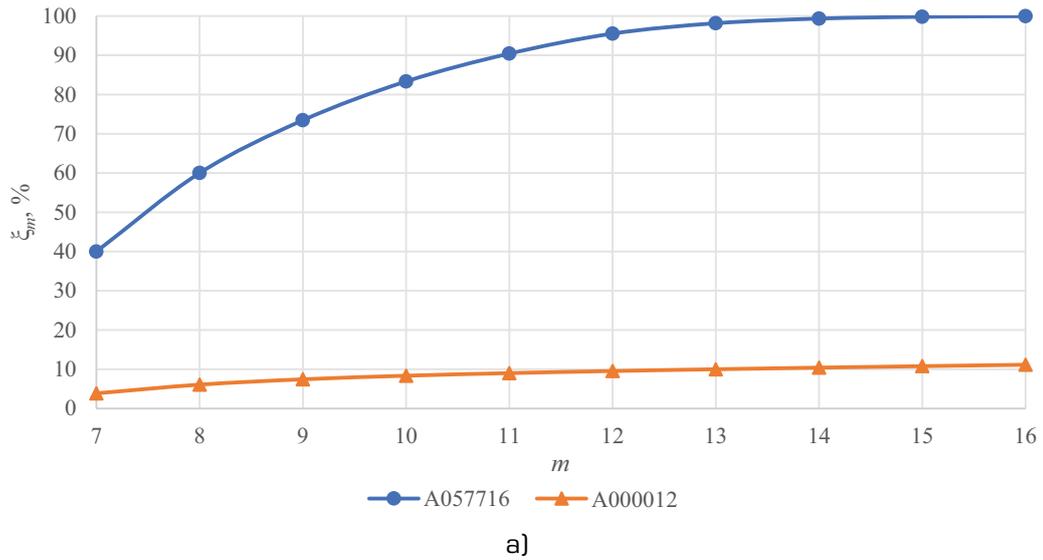


Рис. 5. Зависимости относительных показателей для WS(m, 6, 64)-кодов от m:
 а – ξ_m; б – ν_m, σ_m, α_m; в – ζ_{m,d}

Свойства 10–13 могут использоваться при синтезе дискретных устройств при установлении простых условий обеспечения самопроверяемости их компонентов. Однако в каждом конкретном случае потребуется моделирование работы объекта диагностирования при внесении в его структуру неисправностей из заданной модели.

На рис. 1, б, 2, б, 3, б, 4, б и 5, б даны графики долей необнаруживаемых монотонных, симметричных и асимметричных ошибок от общего числа необнаруживаемых ошибок, возникающих в информационных векторах (величин v_m , σ_m , α_m , %). Если сравнить все эти пять зависимостей для кодов $WS(m, k, M)$ с различными значениями M , то можно увидеть общие тенденции, а также различия. Явно выраженной закономерностью является рост величины α_m с увеличением значения m . Для кодов с $M = 4, 8, 16$ происходит стремительное уменьшение значения v_m с ростом значения m , тогда как для кодов с $M = 32, 64$ с ростом значения m значение v_m сначала возрастает до определенного максимума, а затем начинает снижаться. Максимум этот для $M = 64$ смещен относительно максимума для $M = 32$: в первом случае максимум достигается при $m = 13$, а во втором — при $m = 8$. Причем и сами значения максимумов различаются на порядок: для кода с $M = 64$ $v_m = 3,824\%$, а для кода с $M = 32$ $v_m = 15,011\%$. Иначе ведет себя величина σ_m с ростом значения m для кодов с различными значениями M . Для кодов с $M = 4, 8, 16$ происходит незначительный рост величины σ_m с ростом значения m , а затем — постепенное снижение. Величина σ_m не превосходит 20% для всех кодов, кроме $WS(6, 2, 4)$. Для кодов же с $M = 32, 64$ с ростом значения m значения σ_m постепенно уменьшаются. Причем при малых значениях m значения σ_m велики — данные виды ошибок преобладают в классе необнаруживаемых наряду с асимметричными. Отмеченные особенности необходимо учитывать на практике при выборе методов синтеза дискретных устройств с заданными ограничениями на обнаружение возникающих на выходах ошибок.

На рис. 1, в, 2, в, 3, в, 4, в и 5, в приведены графики значений долей необнаруживаемых ошибок с кратностью d от общего числа ошибок, возникающих в информационных

векторах (величин $\zeta_{m, d}$, %). Отметим, что для кодов $WS(m, 2, 4)$, имеющих в диапазоне показанных на графиках величин m однократные необнаруживаемые ошибки, последние не показаны, так как имеют близкую к нулю долю. Однако однократные ошибки имеются, что, как будет показано далее в экспериментах с тестовыми комбинационными схемами, негативно влияет на характеристики обнаружения ошибок в системах диагностирования. Как раз графики на рис. 1, в, 2, в, 3, в, 4, в и 5, в показывают смещение долей необнаруживаемых ошибок от общего их количества с ростом значения M в сторону большей их кратности. При малых значениях m в классе необнаруживаемых преобладают ошибки с малой их кратностью, однако с ростом значения m происходит изменение этого положения и уже преимущественными становятся ошибки с большими кратностями. Это объясняется как раз наличием малого количества информационных векторов с большим расстоянием Хэмминга с одинаковым общим весом. Также видно, что ни для одного из $WS(m, k, M)$ -кодов при $m \geq 6$, за исключением и $WS(6, 2, 4)$, двукратные ошибки не являются преимущественными видами ошибок в классе необнаруживаемых.

Установленные в исследовании авторов характеристики обнаружения ошибок $WS(m, k, M)$ -кодами целесообразно учитывать и использовать при синтезе дискретных систем с самопроверяемыми, контролепригодными и отказоустойчивыми структурами.

3. Обнаружение ошибок модульными взвешенными кодами с суммированием на выходах тестовых комбинационных схем

В эксперименте исследовалось, насколько эффективно использование $WS(m, k, M)$ -кодов с различными значениями M для обнаружения ошибок, возникающих на выходах тестовых комбинационных схем из набора *LG.Synth'89* [46]. Ошибки при этом вызывались внесением одиночных константных неисправностей на выходы элементов внутренних структур тестовых схем. В качестве схем были выбраны комбинационные схемы, представленные в формате *.netblif, описывающем их структуры. При внесении одиночных константных

неисправностей в структуры тестовых комбинационных схем осуществлялась подача на их входы полного множества входных комбинаций и фиксировалась реакция схемы. Сравнение с эталонной реакцией (в отсутствие неисправностей) позволяло вычислять общее количество ошибок, классифицируя их по кратностям и видам.

В табл. 6 сведены результаты экспериментов с 10 тестовыми комбинационными схемами. В эксперименте не только анализировались обнаруживающие характеристики $WS(m, k, M)$ -кодов с последовательностью весовых коэффициентов A057716 с различными значениями M , но и проводилось сравнение с характеристиками обнаружения ошибок классическими модульными кодами с суммированием (с последовательностью A000012). Напомним, что классические модульные коды с суммированием обнаруживают любые монотонные ошибки в информационных векторах, кроме ошибок с кратностями $d = jM$, $j = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{m}{M} \right\rfloor$, а также любые асимметричные ошибки, кроме некоторой доли ошибок с кратностями $d = M + 2j$, $j = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{m-M}{2} \right\rfloor$, но не обнаруживают все симметричные ошибки в информационных векторах [15]. Это повлияло на вид обнаруженных данными кодами ошибок на выходах тестовых схем. Так, на выходах всех схем были обнаружены все монотонные и асимметричные, но не обнаружены все симметричные ошибки при использовании $WS(m, k, M)$ -кодов с последовательностью весовых коэффициентов A000012 с модулями $M = 8, 16, 32, 64$. В одном случае (схема *pcl*) код с модулем $M = 8$ не обнаружил также все восьмикратные монотонные ошибки. Кодами же со значениями $M = 4$ во всех случаях, кроме одного (схема *cu*), дополнительно не были обнаружены четырехкратные монотонные ошибки. Несмотря на это, за счет пропуска всех симметричных ошибок на выходах схем $WS(m, k, M)$ -коды с последовательностью весовых коэффициентов A000012 не обнаружи-

ли существенное количество ошибок. Для большинства тестовых схем это сказывалось на более плохих обнаруживающих свойствах классических модульных кодов с суммированием в сравнении с $WS(m, k, M)$ -кодами с последовательностью весовых коэффициентов A057716. Коды же с данной последовательностью, наоборот, гораздо эффективнее обнаруживают симметричные ошибки, чем классические модульные коды, но не обнаруживают некоторую долю монотонных и симметричных ошибок. Здесь также присутствует зависимость от значения модуля. Так, если сравнить данные по обнаружению ошибок на выходах тестовых схем с помощью $WS(m, k, M)$ -кодов с $M = 4$, можно отметить, что данные коды вообще хуже всех остальных кодов справляются с ошибками на выходах тестовых схем. По мере увеличения значения M уменьшается и количество не обнаруживаемых на выходах схем ошибок. При этом в сравнении с теми же классическими модульными кодами с суммированием удается существенно уменьшить число необнаруживаемых ошибок. Для некоторых схем выбор $WS(m, k, M)$ -кода с последовательностью весовых коэффициентов A057716 с одним из «больших» модулей обеспечил покрытие всех ошибок: такие результаты были получены для схем *alu2*, *x2*, *f51m*, *pcl*, *cu*, *pm1*. Также из табл. 6 можно увидеть, что с увеличением значения модуля удавалось покрывать все больше и больше ошибок в области малой кратности, что и повлияло на улучшение обнаруживающих способностей кодов по сравнению с классическими модульными кодами с суммированием.

На рис. 6 приведены диаграммы, демонстрирующие эффективность покрытия ошибок на выходах тестовых схем с применением $WS(m, k, M)$ -кодов с последовательностями A000012 и A057716. Даны значения показателя ψ , рассчитанного как доля обнаруживаемых ошибок на выходах тестовых схем от общего числа возникающих ошибок. Обратим внимание читателя на то, что здесь речь уже идет именно об обнаруживаемых ошибках.

Таблица 6. Характеристики обнаружения ошибок на выходах тестовых комбинационных схем с использованием модульных взвешенных кодов с суммированием

Схема	m	Код	Последовательность	Всего	Всего по видам			Распределение общего количества ошибок по кратностям, d					
					Монотонных	Симметричных	Асимметричных	1	2	3	4	5	≥ 6
cm162a	5	WS(5, 2, 4)	A057716	18145	17953	0	192	0	12138	5783	224	0	0
		WS(5, 3, 8)	A057716	6693	6501	0	192	0	6053	416	224	0	0
		WS(5, 4, 16)	A057716	6053	6053	0	0	0	5829	224	0	0	0
		WS(5, 2, 4)	A000012	8413	6493	1920	0	0	1920	0	6493	0	0
		WS(5, k, M), M = 8, 16	A000012	1920	0	1920	0	0	1920	0	0	0	0
Общее количество ошибок на выходах				317331	314067	1920	1344	248348	37886	23996	6877	224	0
cm163a	5	WS(5, 2, 4)	A057716	60000	58944	0	1056	0	40576	19392	0	32	0
		WS(5, 3, 8)	A057716	21312	20288	0	1024	0	20288	1024	0	0	0
		WS(5, 4, 16)	A057716	20288	20288	0	0	0	20288	0	0	0	0
		WS(5, 2, 4)	A000012	30112	19744	10368	0	0	10368	0	19744	0	0
		WS(5, k, M), M = 8, 16	A000012	10368	0	10368	0	0	10368	0	0	0	0
Общее количество ошибок на выходах				1221312	1203648	10368	7296	987648	132096	79680	21824	64	0
alu2	6	WS(6, 2, 4)	A057716	5422	1141	4118	163	0	4240	1141	3	38	0
		WS(6, 3, 8)	A057716	1107	1100	0	7	0	84	1023	0	0	0
		WS(6, 4, 16)	A057716	385	385	0	0	0	84	301	0	0	0
		WS(6, 5, 32)	A057716	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		WS(6, 2, 4)	A000012	7864	142	7722	0	0	7691	0	173	0	0
Общее количество ошибок на выходах				7722	0	7722	0	0	7691	0	31	0	0
Общее количество ошибок на выходах				62838	52460	7722	2656	46424	12347	3707	316	44	0

Продолжение таблицы 6

Схема	m	Код	Последовательность	Всего	Всего по видам			Распределение общего количества ошибок по кратностям, d					
					Моноотных	Симметричных	Асимметричных	1	2	3	4	5	≥ 6
x2	7	WS(7, 2, 4)	A057716	1166	1158	0	8	0	1094	48	24	0	0
		WS(7, 3, 8)	A057716	1116	1108	0	8	0	1092	0	24	0	0
		WS(7, 4, 16)	A057716	272	264	0	8	0	248	0	24	0	0
		WS(7, 5, 32)	A057716	16	16	0	0	0	0	0	16	0	0
		WS(7, 6, 64)	A057716	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		WS(7, 2, 4)	A000012	144	40	104	0	0	104	0	40	0	0
dlu4	8	WS(7, k, M), M = 8, 16, 32, 64	A000012	104	0	104	0	0	104	0	0	0	0
		Общее количество ошибок на выходах		19708	19484	104	120	16624	2428	544	96	16	0
		WS(8, 2, 4)	A057716	380403	293752	47383	39268	256781	65492	43726	14000	238	166
		WS(8, 3, 8)	A057716	38600	20572	514	17514	0	4991	22684	10755	14	156
		WS(8, 4, 16)	A057716	18833	14886	123	3824	0	4735	13934	150	14	0
		WS(8, 5, 32)	A057716	9095	8958	123	14	0	0	8958	123	14	0
f51m	8	WS(8, 6, 64)	A057716	127	0	123	4	0	0	0	123	4	0
		WS(8, 2, 4)	A000012	214993	27551	187276	166	0	183094	0	31731	0	168
		WS(8, k, M), M = 8, 16, 32, 64	A000012	187276	0	187276	0	0	183094	0	4180	0	2
		Общее количество ошибок на выходах		1980377	1652112	187276	140989	1435142	303511	152600	68918	20002	204
		WS(8, 2, 4)	A057716	2656	2601	32	23	2380	250	20	6	0	0
		WS(8, 3, 8)	A057716	98	77	0	21	0	76	16	6	0	0
f51m	8	WS(8, 4, 16)	A057716	81	76	0	5	0	76	0	5	0	0
		WS(8, 5, 32)	A057716	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		WS(8, 6, 64)	A057716	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		WS(8, 2, 4)	A000012	124	1	123	0	0	99	0	25	0	0
		WS(5, k, M), M = 8, 16, 32, 64	A000012	123	0	123	0	0	99	0	24	0	0
		Общее количество ошибок на выходах		13264	13055	123	86	12285	857	92	30	0	0

Продолжение таблицы 6

Схема	m	Код	Последовательность	Всего	Всего по видам			Распределение общего количества ошибок по кратностям, d					
					Монотонных	Симметричных	Асимметричных	1	2	3	4	5	≥ 6
pcle	9	WS(9, 2, 4)	A057716	2422455	2371255	0	51200	2006499	76391	141605	86377	63831	47752
		WS(9, 3, 8)	A057716	219651	184835	0	34816	0	43652	76493	45729	31666	22111
		WS(9, 4, 16)	A057716	91222	91222	0	0	0	32739	19617	25405	4595	8866
		WS(9, 5, 32)	A057716	38483	38483	0	0	0	0	13078	25405	0	0
		WS(9, 6, 64)	A057716	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		WS(9, 2, 4)	A000012	554079	360031	188416	5632	0	188416	0	355670	0	9993
cu	11	WS(9, 3, 8)	A000012	192777	4361	188416	0	0	188416	0	0	0	4361
		WS(9, k, M), M = 16, 32, 64	A000012	188416	0	188416	0	0	188416	0	0	0	0
		Общее количество ошибок на выходах		17472087	17144919	188416	138752	15696664	493980	448104	390486	271656	171197
		WS(11, 2, 4)	A057716	8320	7744	0	576	4352	3328	64	576	0	0
		WS(11, 3, 8)	A057716	3648	3072	0	576	0	3072	0	576	0	0
		WS(11, 4, 16)	A057716	576	0	0	576	0	0	0	576	0	0
cu	11	WS(11, 5, 32)	A057716	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		WS(11, 6, 64)	A057716	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		WS(11, k, M), M = 4, 8, 16, 32, 64	A000012	34048	0	34048	0	0	34048	0	0	0	0
Общее количество ошибок на выходах				137984	101120	34048	2816	73760	60800	2336	1088	0	

Окончание таблицы 6

Схема	m	Код	Последовательность	Всего	Всего по видам			Распределение общего количества ошибок по кратностям, d					
					Монотонных	Симметричных	Асимметричных	1	2	3	4	5	≥ 6
pm1	13	WS(13, 2, 4)	A057716	105616	89344	9184	7088	89344	9184	5408	1680	0	0
		WS(13, 3, 8)	A057716	3776	0	48	3728	0	48	3728	0	0	0
		WS(13, 4, 16)	A057716	1792	0	0	1792	0	0	1792	0	0	0
		WS(13, 5, 32)	A057716	1792	0	0	1792	0	0	1792	0	0	0
		WS(13, 6, 64)	A057716	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		WS(13, k, M), M = 4, 8, 16, 32, 64	A000012	27392	0	27392	0	0	25600	1792	0	0	
Общее количество ошибок на выходах				757760	710144	27392	20224	698112	37632	15872	6144	0	0
sct	15	WS(15, 2, 4)	A057716	2138936	18456	60060	134936	1925484	32296	50904	30604	33312	66336
		WS(15, 3, 8)	A057716	107996	10380	20612	77004	0	6132	36456	14352	16848	34208
		WS(15, 4, 16)	A057716	61264	3488	6120	51656	0	2648	28372	6344	8756	15144
		WS(15, 5, 32)	A057716	18268	740	3316	14212	0	128	1812	3520	5280	7528
		WS(15, 6, 64)	A057716	9924	256	2844	6824	0	0	640	1580	4264	3440
		WS(15, k, M), M = 8, 16, 32, 64	A000012	276156	12708	240096	23352	0	127040	0	68876	0	80240
Общее количество ошибок на выходах				16586128	15823744	240096	522288	15588776	246280	210272	156076	147292	237432

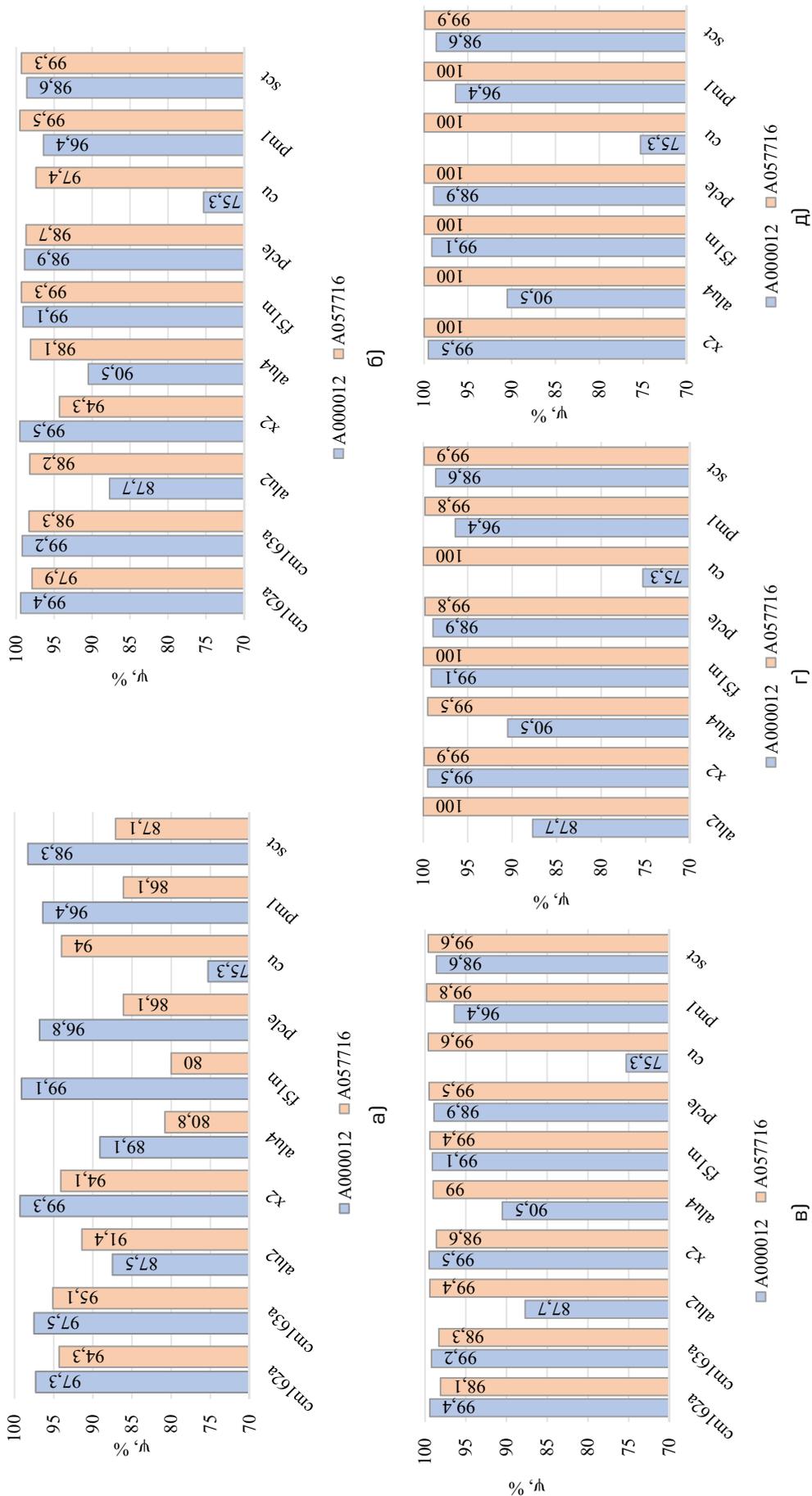


Рис. 6. Значения показателей ψ : а — для WS(m, 2, 4)–кодов; б — для WS(m, 3, 8)–кодов; в — для WS(m, 4, 16)–кодов; г — для WS(m, 5, 32)–кодов; д — для WS(m, 6, 64)–кодов

Из анализа данных рис. 6, а становится ясным, что $WS(m, 2, 4)$ -код с последовательностью A000012 в большинстве случаев проигрывал применению $WS(m, 2, 4)$ -кода с последовательностью A057716: только для двух схем — $alu2$ и cu — был достигнут лучший результат. Более того, данный $WS(m, 2, 4)$ -код при $m \geq 8$ не обнаруживает некоторую долю одиночных ошибок, что делает его низкоэффективным при контроле вычислений схемами с числом выходов $m \geq 8$. Теоретические данные подтверждаются в эксперименте. С учетом того, что вероятность возникновения одиночных ошибок гораздо выше, чем вероятность возникновения ошибок с кратностью $d \geq 2$, $WS(m, 2, 4)$ -коды при $m \geq 8$ вообще следует исключить из рассмотрения кодов, пригодных для синтеза самопроверяемых устройств, либо использовать их в частных случаях. Также отметим, что величина показателя ψ для обоих видов кодов практически для всех схем, за исключением $x2$ и $f51m$ при использовании кода с последовательностью A000012, далека даже от 99 % всех ошибок, возникающих на выходах схем.

Использование модуля $M = 8$ уже значительно повышает эффективность обнаружения ошибок кодами с различными последовательностями весовых коэффициентов (рис. 6, б). Тут уже для большего числа схем более эффективным оказывается применение кода с последовательностью A057716. Он обнаружил больше ошибок, чем классический модульный код, на выходах следующих схем: $alu2$, $alu4$, $f51m$, cu , sct . Значения показателей ψ для кодов с последовательностью A057716 здесь становятся заметно выше, чем для кодов с модулями $M = 4$.

Использование модуля $M = 16$ для кодов с последовательностью A057716 еще больше повысило обнаруживающие характеристики (рис. 6, в). Для классических модульных кодов они уже становятся неизменными для всех схем — необнаруженными оказываются все симметричные ошибки, что как раз характерно данному классу кодов. За счет лучших характеристик обнаружения симметричных ошибок коды с последовательностью A057716 и модулем $M = 16$ обнаруживают свыше 98 % ошибок на выходах всех тестовых схем.

Выбор модуля $M = 32$ для кодов с последовательностью A057716 приводит к еще большему улучшению обнаруживающих характеристик: для трех схем обеспечено покрытие 100 % ошибок (это схемы $alu2$, $f51m$, cu), для схемы $alu4$ — 99,5 % ошибок, а для остальных — свыше 99,8 % всех возможных ошибок (рис. 6, г).

При использовании модуля $M = 64$ (рис. 6, д) коды с последовательностью A057716 обнаруживают все ошибки на выходах всех схем, кроме sct : для нее достигнуто значение показателя $\psi = 99,9$ %.

Результаты экспериментов показывают, насколько эффективными могут оказаться описанные в статье $WS(m, k, M)$ -коды с последовательностью весовых коэффициентов A057716, а также показывают и их некоторые недостатки.

4. Синтез тестеров модульных взвешенных кодов с суммированием

При построении дискретных систем с использованием избыточного кодирования требуется обеспечивать проверку принадлежности формируемых кодовых слов на определенных каскадах их структур. Эту проверку осуществляют с помощью тестеров [10, 12]. Рассмотрим далее вопросы синтеза тестеров для $WS(m, k, M)$ -кодов с последовательностью весовых коэффициентов A057716.

Тестер $WS(m, k, M)$ -кода строится в виде двухкаскадной структуры, изображенной на рис. 7 [47]. В ней кодер представляет собой преобразователь информационных векторов в контрольные векторы $\langle g_k g_{k-1} \dots g_2 g_1 \rangle$, а компаратор — устройство сравнения последних с эталонными $\langle g'_k g'_{k-1} \dots g'_2 g'_1 \rangle$. Тестер снабжается двумя выходами z^0 и z^1 , на которых формируется контрольный сигнал: наличие парафазного сигнала $\langle 01 \rangle$ или $\langle 10 \rangle$ свидетельствует об отсутствии ошибок в вычислениях и соответствии сформированного и эталонного векторов друг другу; нарушение парафазности говорит об обратном. Компаратор синтезируется на основе типовых модулей сжатия парафазных сигналов TRC 's (two-rail checkers), структуры которых предложены в [48]. Данные модули функционируют в парафазной логике, поэтому сигналы от кодера или эталонного вектора предварительно должны быть инвертированы.

Принципы синтеза компараторов на основе модулей *TRC* хорошо известны и описаны, например, в [15]. Кодер же может быть построен различными способами.

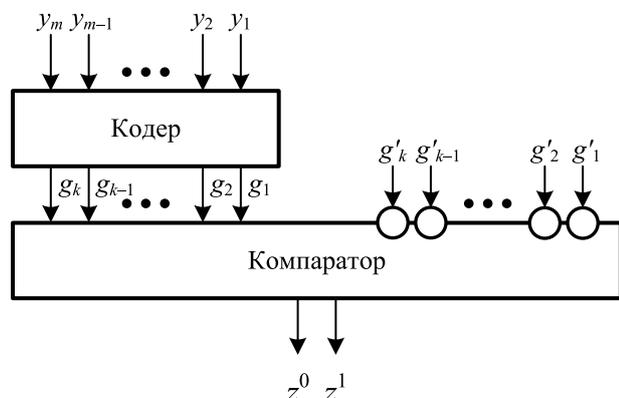


Рис. 7. Структура тестера $WS(m, k, M)$ -кода

Для синтеза кодера $WS(m, k, M)$ -кода требуется получить описание его работы. Это сделать довольно просто, используя принципы формирования контрольных векторов. Тогда каждому информационному вектору будет сопоставлен контрольный, а устройство может быть синтезировано любым известным методом [49].

В ходе исследований способов синтеза кодеров $WS(m, k, M)$ -кодов авторами были синте-

зированы кодеры с использованием двух подходов. Первый заключался в формировании таблиц истинности для кодеров и использовании готовых средств оптимизации и оценки показателей структур цифровых устройств. В качестве такого средства был выбран известный интерпретатор *SIS* [50, 51]. Сгенерированные файлы — описания кодеров $WS(m, k, M)$ -кодов запускались с помощью *SIS*. Далее функции, описывающие проверочные символы, оптимизировались с использованием встроенной процедуры *full_simplify*, а затем определялся показатель L сложности технической реализации в условных единицах библиотеки *stdcell2_2.genlib*. Данный показатель имеет корреляцию с площадью, занимаемой устройством на кристалле, поэтому иногда также называется просто площадью. В табл. 7 приведены данные по оценке показателей сложности технической реализации $WS(m, k, M)$ -кодов со значениями $M = 8, 16, 32$ и 64 при малом числе информационных символов.

Из табл. 7 следует, что при малых значениях m показатели сложности реализации кодеров $WS(m, k, M)$ -кодов с различными значениями M отличаются не столь существенно, тогда как с ростом m это различие становится ощутимым.

Таблица 7. Показатели сложности реализации кодеров, синтезированных с использованием средств *SIS*

m	$WS(m, 3, 8)$	$WS(m, 4, 16)$	$WS(m, 5, 32)$	$WS(m, 6, 64)$
4	408	592	616	616
5	792	1064	1136	1136
6	1056	1568	1904	2040
7	1936	2904	3856	4048
8	3808	6480	7944	8032
9	5880	10800	15464	16488
10	6752	13872	22248	27632
11	6936	19880	35696	46912
12	8848	26896	37976	59160
13	7336	36784	45832	85248
14	7104	60456	128208	193064
15	7056	16240	142184	293464
16	8728	20648	314248	632824

Второй подход, использованный авторами при синтезе кодеров $WS(m, k, M)$ -кодов, заключался в применении типовой элементной базы в виде сумматоров двоичных чисел [52]. Данную элементную базу целесообразно использовать при синтезе кодеров любых кодов с суммированием. Типовыми сумматорами являются полный сумматор, полусумматор и сумматор по модулю $M = 2$. Полный сумматор предназначен для сложения трех одноразрядных двоичных чисел, полусумматор — для сложения двух одноразрядных двоичных чисел. Полный сумматор далее на схемах обозначен как *FA* (full-adder) с указанием на его входы и выходы весов разрядов суммируемых и получаемых чисел. Полусумматор обозначен как *HA* (half-adder) с аналогичными указаниями весов разрядов. Такое обозначение используется, например, в [20]. Сумматор по модулю $M = 2$ обозначен в виде элемента, копирующего саму логическую связку. На данном элементе, поскольку веса складываемых сумматором по модулю $M = 2$ и получаемых чисел равны, указаний этих весов нет. Такое обозначение использовано, например, в [14].

При синтезе кодеров $WS(m, k, M)$ -кодов на основе типовых схем сумматоров был использован такой способ, который позволяет изначально подбирать веса разрядов при суммировании так, чтобы уменьшить количество сигналов переноса. Такой подход описан, например, в [16] и развит в [53] авторами настоящей статьи для использования при синтезе кодеров кодов с произвольными значениями весовых коэффициентов. Покажем его применение для $WS(m, k, M)$ -кодов с последовательностью весовых коэффициентов A057716.

Здесь нужно вернуться к самой последовательности A057716: 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, ... Так как при построении $WS(m, k, M)$ -кода данные значения становятся весовыми коэффициентами, приписываемыми определенным информационным символам y_i , а сложение осуществляется в двоичной логике, то выполним следующую процедуру: значение i -го весового коэффициента представим в двоичном виде, где значащие разряды заменим значениями информационных символов $y_i \in \{0, 1\}$. Таким образом, получаем следующие складываемые числа:

$$\begin{aligned} w_1 &= [3]_{10} = [11]_2 \rightarrow [y_1 y_1]_2; \\ w_2 &= [5]_{10} = [101]_2 \rightarrow [y_2 0 y_2]_2; \\ w_3 &= [6]_{10} = [110]_2 \rightarrow [y_3 y_3 0]_2; \\ w_4 &= [7]_{10} = [111]_2 \rightarrow [y_4 y_4 y_4]_2; \\ w_5 &= [9]_{10} = [1001]_2 \rightarrow [y_5 0 0 y_5]_2; \\ w_6 &= [10]_{10} = [1010]_2 \rightarrow [y_6 0 y_6 0]_2; \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

Далее будем группировать эти числа так, чтобы при формировании первичных складываемых при реализации кодера двоичных чисел использовалось как можно меньше знаков переноса. Это позволит упростить первый каскад сложения. А далее используем стандартную реализацию устройств сложения двоичных чисел [20].

К примеру, синтезируем кодеры $WS(6, k, M)$ -кодов со значениями модулей $M = 4, 8, 16, 32$ и 64. Для этого образуем суммируемые на входах кодеров числа, «объединяя» весовые коэффициенты w_2 и w_6 , а также w_3 и w_5 . Получаем следующие складываемые двоичные числа: $[y_1 y_1]_2$, $[y_4 y_4 y_4]_2$, $[y_5 y_3 y_3 y_5]_2$ и $[y_6 y_2 y_6 y_2]_2$. Далее кодеры синтезируются как устройства сложения этих двоичных чисел в кольце вычетов по требуемому модулю. На рис. 8 показаны структуры $WS(6, k, M)$ -кодов для рассматриваемого примера.

Из рис. 8, к слову, видно, что кодеры $WS(m, k, M)$ -кодов для одинаковых значений числа информационных символов получаются путем упрощения структур кодеров с самым большим значением модуля (в нашем примере это $M = 64$). Строится структура данного кодера, а затем путем последовательного удаления элементов, не требующихся для реализации кодера при меньших значениях модулей, и замены их на свертки по модулю $M = 2$ (они показаны в прямоугольниках с пунктирными границами) производится упрощение.

Нетрудно сравнить получаемые по описанному подходу кодеры с кодерами, синтезируемыми средствами *SIS*. Для этого используем также метрику оценки сложности из *stdcell2_2.genlib*. Для используемой элементной базы и типовых структур сумматоров данные в условных единицах *stdcell2_2.genlib* приведены в [53]: $L_{FA} = 176$, $L_{HA} = 72$ и $L_{XOR} = 40$. В табл. 8 сведены рассчитанные значения показателей сложности реализации кодеров для некоторых малых m . При получении данных

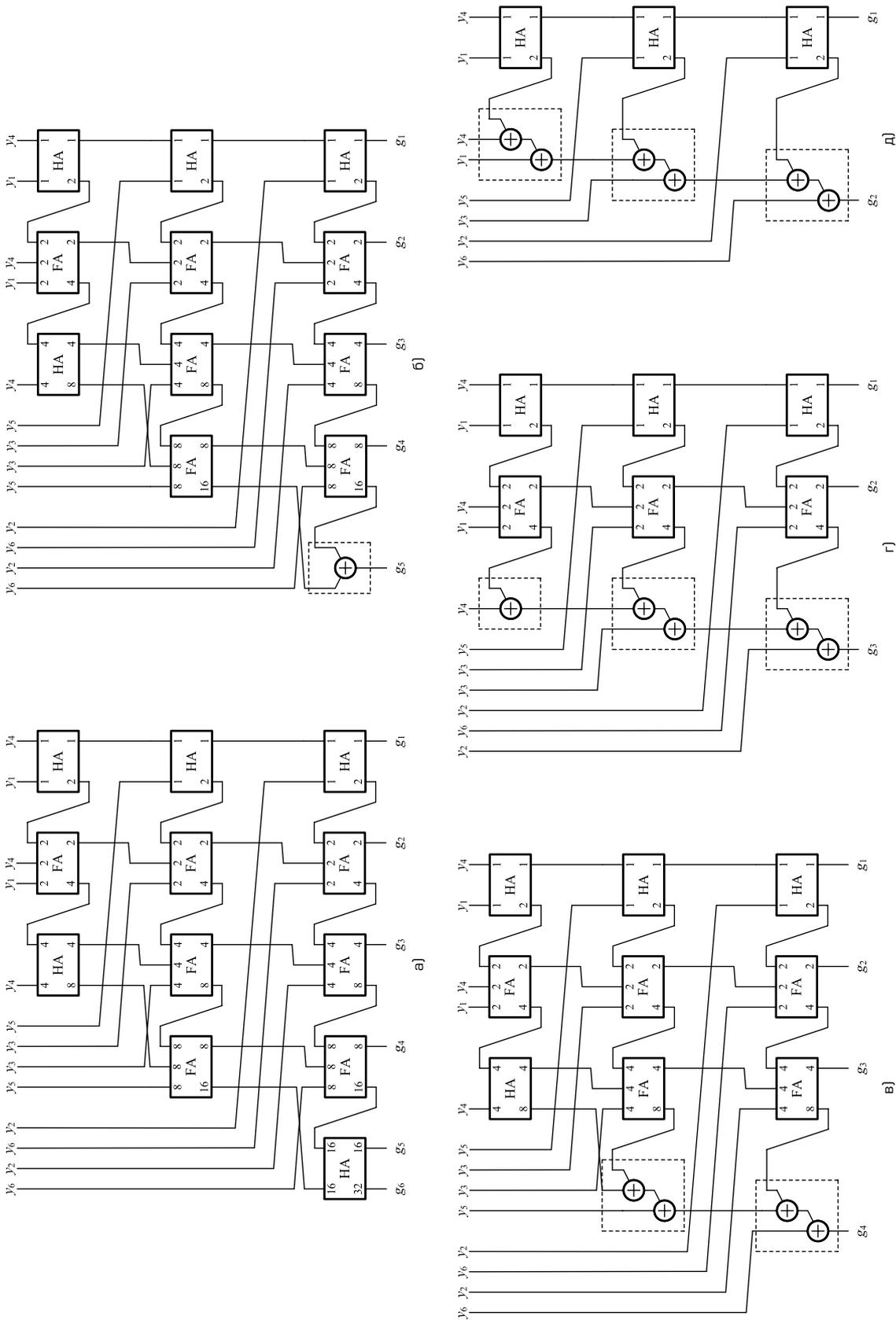


Рис. 8. Структуры кодеров WS(б, к, М)-кодов с различными модулями: а — $M = 64$; б — $M = 32$; в — $M = 16$; г — $M = 8$; д — $M = 4$

Таблица 8. Показатели сложности реализации кодеров, синтезированных с использованием типовых сумматоров

m	$WS(m, 3, 8)$	$WS(m, 4, 16)$	$WS(m, 5, 32)$	$WS(m, 6, 64)$
4	664	968	1064	1064
5	840	1184	1352	1384
6	944	1328	1560	1592
7	1232	1728	2096	2200
8	1272	1872	2312	2480
9	1496	2272	2848	3088
10	1440	2624	3240	3552

табл. 8 первичные складываемые двоичные числа формировались следующим образом:

при $m = 4$ —

$[y_1 y_1]_2, [y_4 y_4 y_4]_2, [y_2 0 y_2]_2, [y_3 y_3 0]_2;$

при $m = 5$ —

$[y_1 y_1]_2, [y_2 0 y_2]_2, [y_4 y_4 y_4]_2, [y_5 y_3 y_3 y_5]_2;$

при $m = 6$ —

$[y_1 y_1]_2, [y_4 y_4 y_4]_2, [y_5 y_3 y_3 y_5]_2, [y_6 y_2 y_6 y_2]_2;$

при $m = 7$ —

$[y_1 y_1]_2, [y_4 y_4 y_4]_2, [y_5 y_3 y_3 y_5]_2, [y_6 y_2 y_6 y_2]_2,$

$[y_7 0 y_7 y_7]_2;$

при $m = 8$ —

$[y_8 y_8 y_1 y_1]_2, [y_6 y_2 y_6 y_2]_2, [y_5 y_3 y_3 y_5]_2, [y_4 y_4 y_4]_2,$

$[y_7 0 y_7 y_7]_2;$

при $m = 9$ —

$[y_8 y_8 y_1 y_1]_2, [y_6 y_2 y_6 y_2]_2, [y_5 y_3 y_3 y_5]_2, [y_4 y_4 y_4]_2,$

$[y_7 0 y_7 y_7]_2, [y_9 y_9 0 y_9]_2;$

при $m = 10$ —

$[y_8 y_8 y_1 y_1]_2, [y_6 y_2 y_6 y_2]_2, [y_5 y_3 y_3 y_5]_2, [y_4 y_4 y_4]_2,$

$[y_9 y_9 0 y_9]_2, [y_{10} y_{10} y_{10} 0]_2, [y_7 0 y_7 y_7]_2.$

Другая группировка весов или другой способ синтеза даст другие значения показателей сложности реализации кодеров.

На рис. 9 для сравнения приведены графические зависимости показателей сложности реализации кодеров, синтезированных на основе типовых сумматоров и средствами *SIS*. Для кодеров $WS(m, k, M)$ -кодов со всеми M средствами *SIS* синтезируются структуры, имеющие меньшие показатели сложности реализации при $m < 6$. Однако при $m \geq 6$ использование типовых сумматоров позволяет синтезировать кодеры с меньшими значениями показателей сложности реализации.

С ростом значения m разница в показателях сложности реализации кодеров, синтези-

руемых с использованием двух рассмотренных подходов, становится все ощутимее: кодеры, синтезируемые на основе типовых схем сумматоров, имеют лучшие характеристики по данному показателю. Также можно отметить, что рост показателя сложности реализации кодера средствами *SIS* является экспоненциальным, а кодера на основе типовых схем сумматоров — линейным.

Заключение

В статье установлены особенности обнаружения ошибок $WS(m, k, M)$ -кодами с последовательностью весовых коэффициентов A057716. Существует ограничение на построение помехозащищенных кодов: $m < 3M - \lceil \log_2 3M \rceil$. В табл. 9 приведены данные по значениям числа информационных символов, для которых строятся помехозащищенные $WS(m, k, M)$ -коды. Для первых 10 модулей приведены числа m^* , по достижении которых $WS(m, k, M)$ -код потеряет свойство помехозащищенности. Для чисел $m < m^*$ можно строить помехозащищенные модульные взвешенные коды с суммированием. Таким образом, используя ограничения на построение помехозащищенных $WS(m, k, M)$ -кодов, можно определять критерии их использования в тех или иных задачах синтеза дискретных устройств. Ясно, что чем меньше значение M , тем более узкая применимость у $WS(m, k, M)$ -кодов. Кроме того, как показали эксперименты с тестовыми комбинационными схемами, например, $WS(m, 2, 4)$ -коды вообще малоэффективны для обнаружения ошибок в вычислениях и их использование весьма ограничено и целесообразно

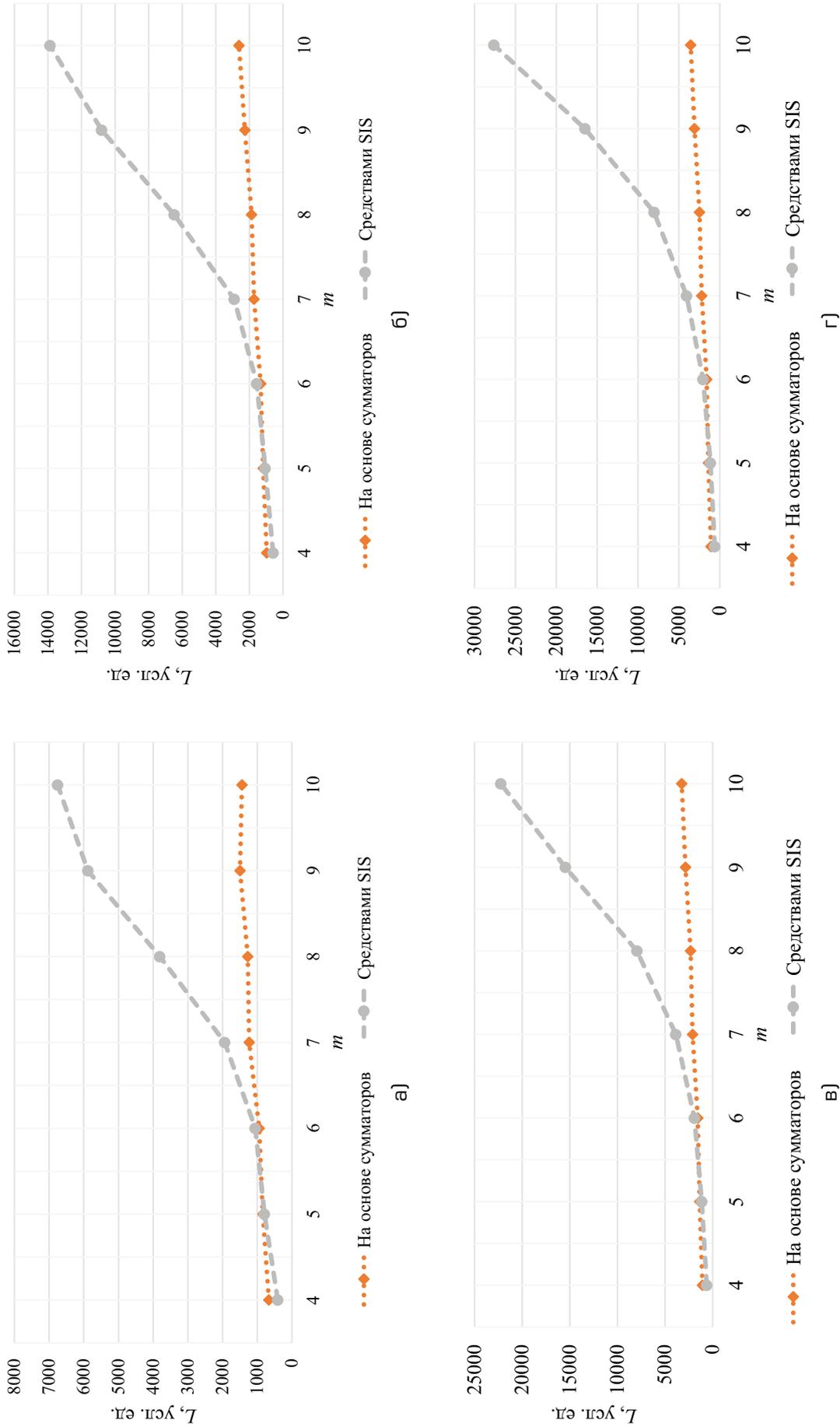


Рис. 9. Значения показателей сложности для кодеров:
 а — $WS(m, 3, 8)$ -кодов; б — $WS(m, 4, 16)$ -кодов; в — $WS(m, 5, 32)$ -кодов; г — $WS(m, 6, 64)$ -кодов

только в некоторых частных случаях. Другие же коды позволяют эффективно контролировать вычисления на выходах комбинационных составляющих дискретных устройств.

Таблица 9. Граничные значения числа информационных символов, при которых теряется свойство помехозащищенности $WS(m, k, M)$ -кодов

M	m^*
4	8
8	19
16	42
32	89
64	184
128	375
256	758
512	1525
1024	3060
2048	6131

С ростом значения M обнаруживающие способности $WS(m, k, M)$ -кодов улучшаются. Это происходит из-за расширения множества контрольных векторов и, как следствие, сдвига числа необнаруживаемых ошибок в сторону большей их кратности (сравните данные таблиц 1–5 в части числа необнаруживаемых ошибок по кратностям). Поэтому, увеличивая модуль при организации контроля вычислений, можно добиться снижения доли необнаруживаемых ошибок. Однако такая процедура связана с ростом числа проверочных символов и увеличением вносимой структурной избыточности. В каждом конкретном случае выбор значения M должен быть индивидуальным и обоснованным.

Отметим также еще одну особенность использования последовательности A057716 для построения модульных взвешенных кодов с суммированием. В [54] предложен способ построения взвешенного кода с суммированием, при котором взвешивались не разряды, а пары подряд следующих разрядов i -й и $(i + 1)$ -й от младшего к старшему, при этом в общий вес добавлялось значение весового коэффициента, если значения разрядов в паре различны. Данные коды авторы назвали кодами со взве-

шенными переходами, отождествляя переход и отличие между значениями разрядов. В дальнейшем коды со взвешенными переходами исследовались в некоторых статьях, например в [55], при использовании различных последовательностей весовых коэффициентов. Если брать последовательность A057716 и формировать такие модульные коды со значениями $M \in \{2^1, 2^2, \dots, 2^{\lceil \log_2(W_{\max} + 1) \rceil - 1}, 2^{\lceil \log_2(W_{\max} + 1) \rceil}\}$, $W_{\max} = \sum_{i=1}^m w_i$, то также для ограниченных значений m могут быть построены помехозащищенные модульные взвешенные коды с суммированием: квазиоптимальные и оптимальные. Анализу свойств и применению данных кодов при синтезе дискретных устройств на современной и перспективной элементных базах могут быть посвящены дальнейшие исследования авторов настоящей статьи.

Исследованные в настоящей статье особенности обнаружения ошибок модульными взвешенными кодами с суммированием, строящимися при использовании последовательности A057716, могут эффективно учитываться при разработке самопроверяемых, контролепригодных и отказоустойчивых дискретных устройств и вычислительных систем. ▲

Библиографический список

1. Методы построения безопасных микроэлектронных систем железнодорожной автоматики / В. В. Сапожников, Вл. В. Сапожников, Х. А. Христов и др.; под ред. Вл. В. Сапожникова. М.: Транспорт, 1995, 272 с.
2. Рабочее диагностирование безопасных информационно-управляющих систем / А. В. Дрозд, В. С. Харченко, С. Г. Антошук и др.; под ред. А. В. Дрозда и В. С. Харченко. Харьков: Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского ХАИ, 2012. 614 с.
3. Сапожников Вл. В. Синтез систем управления движением поездов на железнодорожных станциях с исключением опасных отказов // М.: Наука, 2021. 229 с.
4. Функциональная безопасность систем управления на железнодорожном транспорте / И. Б. Шубинский, Е. Н. Розенберг. М.: Инфра-Инженерия, 2023. 360 с.
5. Drozd A., Kharchenko V., Antoshchuk S., Sulima J., Drozd M. Checkability of the Digital Components

- in Safety-Critical Systems: Problems and Solutions // Proceedings of 9th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTs'2011), Sevastopol, Ukraine, 2011. P. 411–416. DOI: 10.1109/EWDTs.2011.6116606.
6. Hidden Fault Analysis of FPGA Projects for Critical Applications / O. Drozd [et al.] // 2020 IEEE 15th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET) (25–29 February 2020, Lviv-Slavsko, Ukraine). IEEE, 2020. P. 142. DOI: 10.1109/TCSET49122.2020.235591.
 7. Гаврилов М. А., Остиану В. М., Потехин А. И. Надежность дискретных систем // Итоги науки. Серия «Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика», 1969–1970. С. 7–104.
 8. Гавзов Д. В., Сапожников В. В., Сапожников Вл. В. Методы обеспечения безопасности дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1994. № 8. С. 3–50.
 9. McCluskey E. J. Logic Design Principles: With Emphasis on Testable Semicustom Circuits. N. J.: Prentice Hall PTR, 1986. 549 p.
 10. Самопроверяемые устройства и отказоустойчивые системы / Е. С. Согомоян, Е. В. Слабаков. М.: Радио и связь, 1989. 208 с.
 11. Pradhan D. K. Fault-Tolerant Computer System Design. New York: Prentice Hall, 1996, 560 p.
 12. Lala P. K. Self-Checking and Fault-Tolerant Digital Design. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2001. 216 p.
 13. Fujiwara E. Code Design for Dependable Systems: Theory and Practical Applications. John Wiley & Sons, 2006. 720 p.
 14. Göessel M., Ocheretny V., Sogomonyan E., Marienfeld D. New Methods of Concurrent Checking: Edition 1. Dordrecht: Springer Science + Business Media B.V., 2008, 184 p.
 15. Коды с суммированием для систем технического диагностирования. Т. 1: Классические коды Бергера и их модификации / В. В. Сапожников, Вл. В. Сапожников, Д. В. Ефанов. М.: Наука, 2020, 383 с.
 16. Коды с суммированием для систем технического диагностирования. Т. 2: Взвешенные коды с суммированием / В. В. Сапожников, Вл. В. Сапожников, Д. В. Ефанов. М.: Наука, 2021, 455 с.
 17. Hamming R. W. Coding and Information Theory: 2nd edition. New Jersey, Prentice-Hall, 1986. 259 p.
 18. Аксёнова Г. П. Метод синтеза схем встроенного контроля для автоматов с памятью // Автоматика и телемеханика. 1973. № 2. С. 109–116.
 19. Borecký J., Kohlík M., Kubátová H. Parity Driven Reconfigurable Duplex System // Microprocessors and Microsystems. 2017. Vol. 52. P. 251–260. DOI: 10.1016/j.micpro.2017.06.015.
 20. Piestrak S. J. Design of Self-Testing Checkers for Unidirectional Error Detecting Codes. Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 1995. 111 p.
 21. Ефанов Д. В., Сапожников В. В., Сапожников Вл. В. Применение модульных кодов с суммированием для построения систем функционального контроля комбинационных логических схем // Автоматика и телемеханика. 2015. № 10. С. 152–169.
 22. Sapozhnikov V., Sapozhnikov V., Efanov D. Modular Sum Code in Building Testable Discrete Systems // Proceedings of 13th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTs'2015), Batumi, Georgia, September 26–29, 2015. P. 181–187. DOI: 10.1109/EWDTs.2015.7493133.
 23. Сапожников В. В., Сапожников Вл. В., Ефанов Д. В. и др. Модульные коды с суммированием в системах функционального контроля. I. Свойства обнаружения ошибок кодами в информационных векторах // Электронное моделирование. 2016. Т. 38. № 2. С. 27–48.
 24. Сапожников В. В., Сапожников Вл. В., Ефанов Д. В. и др. Модульные коды с суммированием в системах функционального контроля. II. Уменьшение структурной избыточности систем функционального контроля // Электронное моделирование. 2016. Т. 38. № 3. С. 47–61.
 25. Ефанов Д. В., Сапожников В. В., Сапожников Вл. В. Способ построения семейства кодов с суммированием с наименьшим общим количеством необнаруживаемых ошибок в информационных векторах // Информатика. 2019. Т. 16. № 3. С. 101–118.
 26. Сапожников В. В., Сапожников Вл. В., Ефанов Д. В. Модульно-взвешенные коды с суммированием с наименьшим общим числом необнаруживаемых ошибок в информационных векторах // Электронное моделирование. 2017. Т. 39. № 4. С. 69–88.
 27. Berger J. M. A Note on Error Detection Codes for Asymmetric Channels // Information and Control. 1961. Vol. 4. Issue 1. P. 68–73. DOI: 10.1016/S0019-9958(61)80037-5.
 28. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. [Электронный ресурс] URL: <https://oeis.org/> (дата обращения: 12.07.2024).
 29. Мехов В. Б., Сапожников В. В., Сапожников Вл. В. Контроль комбинационных схем на основе

- модифицированных кодов с суммированием // Автоматика и телемеханика. 2008. № 8. С. 153–165.
30. Berger J.M. A Note on Burst Detection Sum Codes // Information and Control. 1961. Vol. 4. Issue 2–3. P. 297–299. DOI: 10.1016/S0019-9958(61)80024-7.
 31. Das D., Touba N.A. Weight-Based Codes and Their Application to Concurrent Error Detection of Multi-level Circuits // Proceedings of 17th IEEE Test Symposium, California, USA, 1999. P. 370–376. DOI: 10.1109/VTEST.1999.766691.
 32. Das D., Touba N.A., Seuring M., Gossel M. Low Cost Concurrent Error Detection Based on Modulo Weight-Based Codes // Proceedings of the IEEE 6th International On-Line Testing Workshop (IOLTW), Spain, Palma de Mallorca, July 3–5, 2000 P. 171–176. DOI: 10.1109/OLT.2000.856633.
 33. Efanov D.V., Pashukov A.V. Weight-Based Sum Codes with Arbitrary Modulus // IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus), 25–28 January 2022, St. Petersburg, Russia. P. 133–138. DOI: 10.1109/ElConRus54750.2022.9755482.
 34. Ефанов Д. В., Пашуков А. В. Взвешенные коды с суммированием в кольце вычетов по произвольному модулю для синтеза цифровых вычислительных устройств // Известия вузов. Приборостроение. 2022. Т. 65. № 4. С. 231–246. DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-4-231-246.
 35. Сапожников В. В., Сапожников Вл. В., Ефанов Д. В. Классические и взвешенные коды Бергера в системах функционального контроля // Развитие элементной базы и совершенствование методов построения устройств железнодорожной автоматики и телемеханики: сб. научн. трудов; под. ред. Вл. В. Сапожникова. СПб.: ФГБОУ ВПО ПГУПС, 2014. С. 81–88.
 36. Сапожников В. В., Сапожников Вл. В., Ефанов Д. В. Анализ свойств классических и взвешенных кодов Бергера по обнаружению ошибок в информационных разрядах // Бюллетень результатов научных исследований. 2014. № 2. С. 79–92.
 37. Ефанов Д. В., Сапожников В. В., Сапожников Вл. В. О свойствах кода с суммированием в схемах функционального контроля // Автоматика и телемеханика. 2010. № 6. С. 155–162.
 38. Сапожников В. В., Сапожников Вл. В., Ефанов Д. В. Классификация ошибок в информационных векторах систематических кодов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2015. Т. 58. № 5. С. 333–343. DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-5-333-343.
 39. Ефанов Д. В., Сапожников В. В., Сапожников Вл. В. Синтез самопроверяемых комбинационных устройств на основе выделения специальных групп выходов // Автоматика и телемеханика. 2018. № 9. С. 79–94.
 40. Ефанов Д. В. Синтез самопроверяемых вычислительных устройств на основе полной системы особых групп выходов объекта диагностирования // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2023. Т. 66. № 5. С. 355–372. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-355-372.
 41. Busaba F.Y., Lala P.K. Self-Checking Combinational Circuit Design for Single and Unidirectional Multibit Errors // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications. 1994. Iss. 1. P. 19–28. DOI: 10.1007/BF00971960.
 42. Morosow A., Saposhnikov V.V., Saposhnikov Vl. V., Goessel M. Self-Checking Combinational Circuits with Unidirectionally Independent Outputs // VLSI Design. 1998. Vol. 5. Iss. 4. P. 333–345. DOI: 10.1155/1998/20389.
 43. Saposhnikov V.V., Morosov A., Saposhnikov Vl. V., Göessel M. A New Design Method for Self-Checking Unidirectional Combinational Circuits // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications. 1998. Vol. 12. Iss. 1–2. P. 41–53. DOI: 10.1023/A:1008257118423.
 44. Matrosova A. Yu., Ostanin S. A. Self-Checking Synchronous Sequential Circuit Design for Unidirectional Error // Proceedings of the IEEE European Test Workshop (ETW'98), 27–29 May 1998, Sitges, Barcelona, Spain.
 45. Ефанов Д. В., Сапожников В. В., Сапожников Вл. В. Коды с суммированием с фиксированными значениями кратностей обнаруживаемых монотонных и асимметричных ошибок для систем технического диагностирования // Автоматика и телемеханика. 2019. № 6. С. 121–141.
 46. Collection of Digital Design Benchmarks. [Электронный ресурс] URL: <https://ddd.fit.cvut.cz/www/prj/Benchmarks/> (дата обращения: 21.05.2024).
 47. Самопроверяемые дискретные устройства / В. В. Сапожников, Вл. В. Сапожников. СПб: Энергоатомиздат, 1992. 224 с.
 48. Carter W.C., Duke K.A., Schneider P.R. Self-Checking Error Checker for Two-Rail Coded Data // United States Patent Office, filed July 25, 1968, ser. No. 747533, patented Jan. 26, 1971, N.Y., 10 p.
 49. Логические основы проектирования дискретных устройств / А. Д. Закревский, Ю. В. Поттосин, Л. Д. Черемисинова. М.: Физматлит, 2007, 592 с.

50. Sentovich E. M., Singh K. J., Moon C., Savoj H., Brayton R. K., Sangiovanni-Vincentelli A. Sequential Circuit Design Using Synthesis and Optimization // Proceedings IEEE International Conference on Computer Design: VLSI in Computers & Processors, 11–14 October 1992, Cambridge, MA, USA, pp. 328–333, doi: 10.1109/ICCD.1992.276282.
51. SIS: A System for Sequential Circuit Synthesis / E. M. Sentovich, K. J. Singh, L. Lavagno, C. Moon, R. Murgai, A. Saldanha, H. Savoj, P. R. Stephan, R. K. Brayton, A. Sangiovanni-Vincentelli // Electronics Research Laboratory, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California, Berkeley, 4 May 1992, 45 p.
52. Harris D. M., Harris S. L. Digital Design and Computer Architecture. Morgan Kaufmann, 2012. 569 p.
53. Ефанов Д. В., Елина Е. И. Синтез кодеров взвешенных кодов с суммированием в кольце вычетов по заданному модулю // Программная инженерия. 2024. Т. 15. № 6. С. 296–307. DOI: 10.17587/prin.15.296–307.
54. Saposhnikov V., Saposhnikov V. I. New Code for Fault Detection in Logic Circuits // Proceedings of 4th International Conference on Unconventional Electromechanical and Electrical Systems, St. Petersburg, Russia, June 21–24, 1999. P. 693–696.
55. Дмитриев В. В. О двух способах взвешивания и их влиянии на свойства кодов с суммированием взвешенных переходов в системах функционального контроля логических схем // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2015. № 3 (44). С. 119–129.

TRANSPORT AUTOMATION RESEARCH. 2024. Vol. 10, no. 3. P. 296–330.
DOI: 10.20295/2412-9186-2024-10-03-296-330

Modular sum codes with a sequence of weight coefficients forming a natural number series excluding powers of two

Information about authors

Efanov D. V., D. Sc., Professor, Full-member of International Transport Academy, IEEE Member, Professor^{1,3,4}, General Director Deputy on Research²
E-mail: TrES-4b@yandex.ru

Yelina Y. I., Ph. D. student¹. E-mail: eseniya-elina@mail.ru

¹ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Institute of Mechanical Engineering, Materials and Transport, Higher School of Transport, St. Petersburg

² NIPi "TransStroybezopasnost" LLC, St. Petersburg

³ Russian University of Transport, Department of Automation, Remote Control and Communications in Railway Transport, Moscow

⁴ Tashkent State Transport University, Department of Automation and Remote Control, Tashkent

Abstract. The paper presents the results of studies on the characteristics of modular weight-based sum codes, where the sequence is formed by a natural series of numbers excluding powers of two. The consideration of the studied characteristics is advisable when developing discrete systems and their diagnostic support. Catalogs of the considered codes obtained using modules $M = 4, 8, 16, 32$, and 64 are provided. The choice of these specific modules is due to the fact that the number of check symbols in the codewords of the considered codes is small, which minimizes structural redundancy when constructing discrete systems and their diagnostic support, resulting in self-checking, controllable, and fault-tolerant structures. Modular weight-based sum codes detect all single errors with the number of data symbols $m < 3M - \lceil \log_2 3M \rceil$. It is also demonstrated that the considered codes detect no fewer errors than the well-known modular sum codes of single digits (classical modular sum codes). As the module value increases, the gain in the total number of errors detected by the modular weighted codes compared to classical modular codes significantly increases. Modular weighted codes are more effective at detecting multidirectional errors of even multiplicity in data vectors containing groups of distortions $\{0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0\}$ (symmetric errors) than classical modular sum codes. However, modular weight-based sum codes are less effective in handling

asymmetric errors occurring in data vectors. In an experiment with test combinational circuits, it was shown that modular weighted codes with a module $M = 4$ do not detect more errors occurring at circuit outputs than classical modular codes with this module. Modular weight-based sum codes and a module $M = 8$ have slightly better characteristics. However, a general recommendation is to use modules that are powers of two starting from $M = 16$. Increasing the module allows for an increase in the number of detectable errors at the outputs of benchmarks, up to 100% coverage. Modular weight-based sum codes, with a sequence of weight coefficients forming a natural series of numbers excluding powers of two, can be effectively used in the development of discrete systems and their diagnostic support.

Keywords: technical diagnostics systems for discrete devices, modular weight-based sum codes, sequence of weight coefficients, natural series excluding powers of two.

References

1. Metody postroeniya bezopasnyh mikroelektronnyh sistem zheleznodorozhnoj avtomatiki / V. V. Sapozhnikov, V. V. Sapozhnikov, H. A. Hristov i dr.; pod red. V. V. Sapozhnikova. M.: Transport, 1995. 272 s. (In Russian)
2. Rabochee diagnostirovanie bezopasnyh informacionno-upravlyayushchih sistem / A. V. Drozd, V. S. Harchenko, S. G. Antoshchuk i dr.; pod red. A. V. Drozda i V. S. Harchenko. Har'kov: Nacional'nyj aerokosmicheskij universitet im. N. E. Zhukovskogo HAI. 2012. 614 s. (In Russian)
3. Sintez sistem upravleniya dvizheniem poezdov na zheleznodorozhnyh stantsiyah s iskluycheniem opasnyh otkazov / V. V. Sapozhnikov. M.: Nauka, 2021. 229 s. (In Russian)
4. Funkcional'naya bezopasnost' sistem upravleniya na zheleznodorozhnom transporte / I. B. Shubinskij, E. N. Rozenberg. M.: Infra-Inzheneriya, 2023. 360 s. (In Russian)
5. Drozd A., Kharchenko V., Antoshchuk S., Sulima J., Drozd M. Checkability of the Digital Components in Safety-Critical Systems: Problems and Solutions // Proceedings of 9th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTs'2011), Sevastopol, Ukraine, 2011, pp. 411–416. DOI: 10.1109/EWDTs.2011.6116606.
6. Hidden Fault Analysis of FPGA Projects for Critical Applications / O. Drozd [et al.] // 2020 IEEE 15th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET) (25–29 February 2020, Lviv-Slavsko, Ukraine). IEEE, 2020. P. 142. DOI: 10.1109/TCSET49122.2020.235591.

7. Gavrilov M. A., Ostianu V. M., Potekhin A. I. Nadezhnost' diskretnykh sistem // Itogi nauki. Seriya "Teoriya veroyatnostej. Matematicheskaya statistika. Teoreticheskaya kibernetika", 1969–1970. S. 7–104. (In Russian)
8. Gavzov D. V., Sapozhnikov V. V., Sapozhnikov VI. V. Metody obespecheniya bezopasnosti diskretnykh sistem // Avtomatika i telemekhanika. 1994. № 8. S. 3–50. (In Russian)
9. McCluskey E. J. Logic Design Principles: With Emphasis on Testable Semicustom Circuits. N. J.: Prentice Hall PTR, 1986. 549 p.
10. Samoproveryaemye ustrojstva i otkazoustojchivye sistemy / E. S. Sogomonyan, E. V. Slabakov. M.: Radio i svyaz', 1989. 208 s. (In Russian)
11. Pradhan D. K. Fault-Tolerant Computer System Design. New York: Prentice Hall, 1996. 560 p.
12. Lala P. K. Self-Checking and Fault-Tolerant Digital Design. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2001. 216 p.
13. Fujiwara E. Code Design for Dependable Systems: Theory and Practical Applications. John Wiley & Sons, 2006. 720 p.
14. Göessel M., Ocheretny V., Sogomonyan E., Marienfeld D. New Methods of Concurrent Checking: Edition 1. Dordrecht: Springer Science + Business Media B. V., 2008, 184 p.
15. Kody s summirovaniem dlya sistem tekhnicheskogo diagnostirovaniya. T. 1: Klassicheskie kody Bergera i ih modifikacii / V. V. Sapozhnikov, VI. V. Sapozhnikov, D. V. Efanov. M.: Nauka, 2020, 383 s. (In Russian)
16. Kody s summirovaniem dlya sistem tekhnicheskogo diagnostirovaniya. T. 2: Vzvshennyye kody s summirovaniem / V. V. Sapozhnikov, VI. V. Sapozhnikov, D. V. Efanov. M.: Nauka, 2021, 455 s. (In Russian)
17. Hamming R. W. Coding and Information Theory: 2nd edition. New Jersey, Prentice-Hall, 1986. 259 p.
18. Aksyonova G. P. Metod sinteza skhem vstroennogo kontrolya dlya avtomatov s pamyat'yu // Avtomatika i telemekhanika. 1973. № 2. S. 109–116. (In Russian)
19. Borecky J., Kohlík M., Kubátová H. Parity Driven Reconfigurable Duplex System // Microprocessors and Microsystems. 2017. Vol. 52. P. 251–260. DOI: 10.1016/j.micpro.2017.06.015.
20. Piestrak S. J. Design of Self-Testing Checkers for Unidirectional Error Detecting Codes. Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 1995. 111 p.
21. Efanov D. V., Sapozhnikov V. V., Sapozhnikov VI. V. Primenenie modul'nykh kodov s summirovaniem dlya postroeniya sistem funkcional'nogo kontrolya kombinacnykh logicheskikh skhem // Avtomatika i telemekhanika. 2015. № 10. S. 152–169. (In Russian)
22. Sapozhnikov V., Sapozhnikov VI., Efanov D. Modular Sum Code in Building Testable Discrete Systems // Proceedings of 13th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2015), Batumi, Georgia, September 26–29, 2015. P. 181–187. DOI: 10.1109/EWDTS.2015.7493133.
23. Sapozhnikov V. V., Sapozhnikov VI. V., Efanov D. V. i dr. Modul'nye kody s summirovaniem v sistemah funkcional'nogo kontrolya. I. Svoystva obnaruzheniya oshibok kodami v informacnykh vektorah // Elektronnoe modelirovanie. 2016. T. 38. № 2. S. 27–48. (In Russian)
24. Sapozhnikov V. V., Sapozhnikov VI. V., Efanov D. V. i dr. Modul'nye kody s summirovaniem v sistemah funkcional'nogo kontrolya. II. Umen'shenie strukturnoj izbytochnosti sistem funkcional'nogo kontrolya // Elektronnoe modelirovanie. 2016. T. 38. № 3. S. 47–61. (In Russian)
25. Efanov D. V., Sapozhnikov V. V., Sapozhnikov VI. V. Sposob postroeniya semejstva kodov s summirovaniem s naimen'shim obshchim kolichestvom neobnaruzhivaemykh oshibok v informacnykh vektorah // Informatika. 2019. T. 16. № 3. S. 101–118. (In Russian)
26. Sapozhnikov V. V., Sapozhnikov VI. V., Efanov D. V. Modul'no-vzvshennyye kody s summirovaniem s naimen'shim obshchim chislom neobnaruzhivaemykh oshibok v informacnykh vektorah // Elektronnoe modelirovanie. 2017. T. 39. № 4. S. 69–88. (In Russian)
27. Berger J. M. A Note on Error Detection Codes for Asymmetric Channels // Information and Control. 1961. Vol. 4. Issue 1. P. 68–73. DOI: 10.1016/S0019-9958(61)80037-5.
28. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. [Elektronnyj resurs] URL: <https://oeis.org/> (data obrashcheniya: 12.07.2024).
29. Mekhov V. B., Sapozhnikov V. V., Sapozhnikov VI. V. Kontrol' kombinacnykh skhem na osnove modifitsirovannykh kodov s summirovaniem // Avtomatika i telemekhanika. 2008. № 8. S. 153–165. (In Russian)
30. Berger J. M. A Note on Burst Detection Sum Codes // Information and Control. 1961. Vol. 4. Issue 2–3. P. 297–299. DOI: 10.1016/S0019-9958(61)80024-7.
31. Das D., Touba N. A. Weight-Based Codes and Their Application to Concurrent Error Detection of Multilevel Circuits // Proceedings of 17th IEEE Test Symposium, California, USA, 1999. P. 370–376. DOI: 10.1109/VTEST.1999.766691.
32. Das D., Touba N. A., Seuring M., Gossel M. Low Cost Concurrent Error Detection Based on Modulo Weight-Based Codes // Proceedings of the IEEE 6th International On-Line Testing Workshop (IOLTW), Spain, Palma de Mallorca, July 3–5, 2000. P. 171–176. DOI: 10.1109/OLT.2000.856633.
33. Efanov D. V., Pashukov A. V. Weight-Based Sum Codes with Arbitrary Modulus // IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElCon-Rus), 25–28 January 2022, St. Petersburg, Russia. P. 133–138. DOI: 10.1109/ElConRus54750.2022.9755482.
34. Efanov D. V., Pashukov A. V. Vzvshennyye kody s summirovaniem v kol'ce vychetov po proizvol'nomu modulyu dlya sinteza cifrovyykh vychislitel'nykh ustrojstv // Izvestiya vuzov. Priborostroenie. 2022. T. 65. № 4. S. 231–246. DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-4-231-246. (In Russian)
35. Sapozhnikov V. V., Sapozhnikov VI. V., Efanov D. V. Klassicheskie i vzvshennyye kody Bergera v sistemah funkcional'nogo kontrolya // Razvitie elementnoj bazy i sovershenstvovanie metodov postroeniya ustrojstv zheleznodorozhnoj avtomatiki i telemekhaniki: sb. nauchn. trudov; pod. red. VI. V. Sapozhnikova. SPb.: FGBOU VPO PGUPS, 2014. S. 81–88. (In Russian)
36. Sapozhnikov V. V., Sapozhnikov VI. V., Efanov D. V. Analiz svoystv klassicheskikh i vzvshennykh kodov Bergera po obnaruzheniyu oshibok v informacnykh razryadakh // Byulleten' rezul'tatov nauchnykh issledovaniy. 2014. № 2. S. 79–92. (In Russian)
37. Efanov D. V., Sapozhnikov V. V., Sapozhnikov VI. V. O svoystvah koda s summirovaniem v skhemah funkcional'nogo kontrolya // Avtomatika i telemekhanika. 2010. № 6. S. 155–162. (In Russian)
38. Sapozhnikov V. V., Sapozhnikov VI. V., Efanov D. V. Klassifikaciya oshibok v informacnykh vektorah sistemicheskikh kodov // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenij. Priborostroenie. 2015. T. 58. № 5. S. 333–343. DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-5-333-343. (In Russian)
39. Efanov D. V., Sapozhnikov V. V., Sapozhnikov VI. V. Sintez samoproveryaemykh kombinacnykh ustrojstv na osnove vydeleniya special'nykh grupp vyhodov // Avtomatika i telemekhanika. 2018. № 9. S. 79–94. (In Russian)
40. Efanov D. V. Sintez samoproveryaemykh vychislitel'nykh ustrojstv na osnove polnoj sistemy osobykh grupp vyhodov ob'ekta diagnostirovaniya // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenij. Priborostroenie. 2023. T. 66. № 5. S. 355–372. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-355-372. (In Russian)
41. Busaba F. Y., Lala P. K. Self-Checking Combinational Circuit Design for Single and Unidirectional Multibit Errors // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications. 1994. Iss. 1. P. 19–28. DOI: 10.1007/BF00971960.
42. Morosow A., Saposhnikov V. V., Saposhnikov VI. V., Goessel M. Self-Checking Combinational Circuits with Unidirectionally Independent Outputs // VLSI Design. 1998. Vol. 5. Iss. 4. P. 333–345. DOI: 10.1155/1998/20389.
43. Saposhnikov V. V., Morosow A., Saposhnikov VI. V., Göessel M. A New Design Method for Self-Checking Unidirectional Combinational Circuits // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications. 1998. Vol. 12. Iss. 1–2. P. 41–53. DOI: 10.1023/A:1008257118423.
44. Matrosova A. Yu., Ostanin S. A. Self-Checking Synchronous Sequential Circuit Design for Unidirectional Error // Proceedings of the IEEE European Test Workshop (ETW'98), 27–29 May 1998, Sitges, Barcelona, Spain.
45. Efanov D. V., Sapozhnikov V. V., Sapozhnikov VI. V. Kody s summirovaniem s fiksirovannymi znacheniyami kratnostej obnaruzhivaemykh monotonykh i asimmetrichnykh oshibok dlya sistem tekhnicheskogo diagnostirovaniya // Avtomatika i telemekhanika. 2019. № 6. S. 121–141. (In Russian)

46. Collection of Digital Design Benchmarks. [Elektronnyj resurs] URL: <https://ddd.fit.cvut.cz/www/prj/Benchmarks/> (data obrashcheniya: 21.05.2024).
47. Samoproveryaemye diskretnye ustrojstva / V. V. Sapozhnikov, VI. V. Sapozhnikov. SPb: Energoatomizdat, 1992. 224 s. (In Russian)
48. Carter W. C., Duke K. A., Schneider P. R. Self-Checking Error Checker for Two-Rail Coded Data // United States Patent Office, filed July 25, 1968, ser. No. 747533, patented Jan. 26, 1971, N. Y., 10 p.
49. Logicheskie osnovy proektirovaniya diskretnyh ustrojstv / A. D. Zakrevskij, Yu. V. Pottosin, L. D. Cheremisinova. M.: Fizmatlit, 2007, 592 s. (In Russian)
50. Sentovich E. M., Singh K. J., Moon C., Savoj H., Brayton R. K., Sangiovanni-Vincentelli A. Sequential Circuit Design Using Synthesis and Optimization // Proceedings IEEE International Conference on Computer Design: VLSI in Computers & Processors, 11–14 October 1992, Cambridge, MA, USA. P. 328–333. DOI: 10.1109/ICCD.1992.276282.
51. SIS: A System for Sequential Circuit Synthesis / E. M. Sentovich, K. J. Singh, L. Lavagno, C. Moon, R. Murgai, A. Saldanha, H. Savoj, P. R. Stephan, R. K. Brayton, A. Sangiovanni-Vincentelli // Electronics Research Laboratory, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California, Berkeley, 4 May 1992, 45 p.
52. Harris D. M., Harris S. L. Digital Design and Computer Architecture. Morgan Kaufmann, 2012, 569 p.
53. Efanov D. V., Elina E. I. Sintez koderov vzveshennyh kodov s summirovaniem v kol'ce vychetov po zadannomu modulyu // Programmaya inzheneriya. 2024. T. 15. № 6. S. 296–307. DOI: 10.17587/prin.15.296–307. (In Russian)
54. Sapozhnikov V., Sapozhnikov VI. New Code for Fault Detection in Logic Circuits // Proceedings of 4th International Conference on Unconventional Electromechanical and Electrical Systems, St. Petersburg, Russia, June 21–24, 1999. P. 693–696. (In Russian)
55. Dmitriev V. V. O dvuh sposobah vzveshivaniya i ih vliyaniy na svoystva kodov s summirovaniem vzveshennyh perekhodov v sistemah funkcional'nogo kontrolya logicheskikh skhem // Izvestiya Peterburgskogo universiteta putej soobshcheniya. 2015. № 3 (44). S. 119–129. (In Russian)