

УДК 656.073

Синтез ортогонального базиса на конечном временном интервале для цифровой обработки сигналов с ограниченным спектром

Ходаковский Валентин Аветикович — д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры «Информатика и информационная безопасность». Научные интересы: математическое моделирование, цифровая обработка сигналов, теория информации. E-mail: hva1104@mail.ru

Коротченко Владислав Дмитриевич — аспирант кафедры «Электрическая связь». Научные интересы: математическое моделирование, цифровая обработка сигналов, теория информации. E-mail: vladis147@mail.ru

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Россия, 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9

Для цитирования: Ходаковский В. А., Коротченко В. Д. Синтез ортогонального базиса на конечном временном интервале для цифровой обработки сигналов с ограниченным спектром // Интеллектуальные технологии на транспорте. 2025. № 2 (42). С. 71–82. DOI: 10.20295/2413-2527-2025-242-71-82

Аннотация. Рассмотрена задача синтеза ортогонального базиса для передачи информационных сообщений по узкополосным каналам связи при наличии шума. **Цель:** разработка метода синтеза ортогонального базиса на конечном временном интервале для эффективной цифровой обработки сигналов с ограниченным спектром, которая направлена на увеличение пропускной способности цифровых каналов связи. Для достижения цели использованы матричный метод синтеза и анализа сигналов, программа в среде MATLAB и другие инновационные подходы. **Методы:** теоретический анализ и компьютерное моделирование. **Результаты:** подтверждают высокий потенциал применения ортогонального базиса на конечном временном интервале для синтеза и анализа сигналов с ограниченным спектром. **Практическая значимость:** заключается в улучшении качества передачи сигналов, особенно в условиях ограниченной полосы пропускания каналов связи, что способствует созданию более эффективных и надежных систем связи. **Обсуждение:** высказываются рекомендации по дальнейшему совершенствованию предложенного базиса, освещаются вопросы, требующие дальнейших исследований и разработок. Исследование имеет важное значение для развития телекоммуникационных технологий на железнодорожном транспорте.

Ключевые слова: разложение функции по базису, ортогональный базис, аппроксимация, синтез и анализ сигналов, цифровая обработка сигналов

1.2.2 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)

Введение

Одной из важнейших задач в теории связи является поиск сигналов с наилучшими автокорреляционными свойствами, чему посвящены работы [1–4].

В задачах передачи информационных сообщений по узкополосным каналам связи при наличии

шума также существует много проблем, одной из которых является межсимвольная интерференция, возникающая вследствие взаимного влияния гармоник смежных символов и выбора ортогонального базиса на бесконечном интервале. Ликвидировать межсимвольную интерференцию можно

путем синтеза сигналов специального типа, чему посвящены работы [5–7].

Данные вопросы объединяет общая проблема повышения скорости и помехоустойчивости выбранных сигналов и методы их синтеза и анализа. Долгие годы в теории связи использовался базис ортогональных тригонометрических функций, затем был предложен базис Котельникова — Шеннона, или функция отсчетов Котельникова вида $\text{sinc}(x) = \sin(x) / x$. С 2009 года появляются работы [7–11], в которых исследуются конечномерные базисы типа Вейля — Гейзенберга.

В то же время все современные разработки, использующие такие виды модуляции, как ортогональная частотная модуляция OFDM, многоуровневая квадратурная модуляция QAM и т. д. опираются на более ранние исследования [12–16]. Поэтому неудивительно, что появились мысли о конечномерных базисах, то есть базисах функций на ограниченном интервале времени, но спектр которых так же ограничен, как и у функции отсчетов Котельникова. Хорошо известно, что функция отсчетов представлена на бесконечном временном интервале, и ограничение ряда Котельникова некоторым числом членов на заданном интервале времени приводит к ошибкам восстановления сигнала. Отсюда часто делался вывод, что полное восстановление сигнала с ограниченным спектром за конечное время в принципе невозможно.

В соответствии с теоремой отсчетов Котельникова непрерывная функция $S(t)$ со спектром, ограниченным сверху частотой f , может быть полностью восстановлена по своим равномерным отсчетам, выполненным с интервалом $\tau = 1 / 2f$:

$$S(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \gamma(f, t, k) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \text{sinc} \left[2\pi f \left(t - \frac{k}{2f} \right) \right], \quad (1)$$

где A — вектор отсчетов (амплитуд);

$\gamma(f, t, k)$ — базисная функция;

f — верхняя граничная частота в спектре функции $S(t)$;

k — индекс текущего отсчета;

n — размерность вектора отсчетов.

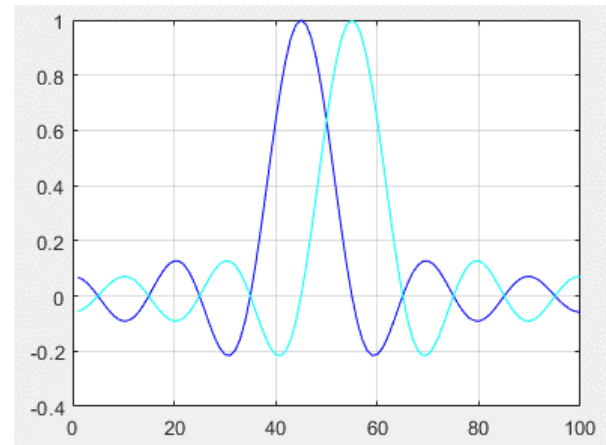


Рис. 1. Функция $\text{sinc}(x)$ при $f = 1600$ Гц, $T = 5/f$, $k_1 = 4,5$ и $k_2 = 5,5$

На рис. 1 представлен график двух функций отсчетов вида $\text{sinc} \left[2\pi f \left(t - \frac{k}{2f} \right) \right]$.

Функция (1) решает задачу аппроксимации узловых точек вектора A непрерывным функционалом, состоящим из суммы финитных функций вида $\sin(x)/x$, смещенных для каждого значения вектора A на произведение индекса этого вектора на постоянный интервал, равный половине периода наивысшей частоты в спектре формируемой непрерывной функции. Таким образом, формируемая функция имеет ограниченный спектр и точно проходит через каждое текущее значение этого вектора. Спектр формируемой непрерывной функции $S(t)$ соответствует спектру базисной функции. На рис. 2 представлена аппроксимация вектора, сформированного из 13-позиционного кода Баркера, в котором нули заменены на значения «-1».

Поставим задачу восстановления вектора отсчетов A по значениям непрерывной функции $S(t)$, для этого необходимо осуществить свертку сигнала $S(t)$ с импульсной характеристикой идеального фильтра низких частот (ФНЧ) вида

$$\text{sinc} \left[2\pi f \left(t - \frac{k}{2f} \right) \right].$$

$$A_k = 2f \int_0^T S(t) \text{sinc} \left[2\pi f \left(t - \frac{k}{2f} \right) \right] dt. \quad (2)$$

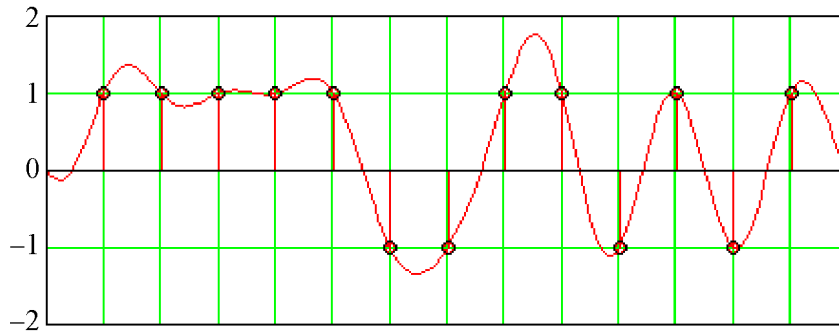


Рис. 2. Вектор A и непрерывная функция, аппроксимирующая значения этого вектора

Подставим в (2) выражение $S(t)$ из (1), тогда получим:

$$Av_k = 2f \int_{-T}^T \sum_{j=0}^{n-1} A_j \operatorname{sinc} \left[2\pi f \left(t - \frac{j}{2f} \right) \right] \times \operatorname{sinc} \left[2\pi f \left(t - \frac{k}{2f} \right) \right] dt. \quad (3)$$

В выражении (3) индекс j соответствует индексу информационного вектора A , индекс k — смещению импульсной характеристики идеального фильтра низких частот при фильтрации принятого непрерывного сигнала с целью поиска амплитуд принятого вектора Av .

В соответствии с правилами порядок интегрирования и суммирования можно изменить, тогда получим:

$$Av_k = \sum_{j=0}^{n-1} A_j 2f \int_{-T}^T \operatorname{sinc} \left[2\pi f \left(t - \frac{j}{2f} \right) \right] \times \operatorname{sinc} \left[2\pi f \left(t - \frac{k}{2f} \right) \right] dt. \quad (4)$$

В выражении (4) интеграл представляет собой корреляционную матрицу, в которой при условии ортогональности данного базиса все элементы должны быть равны нулю, кроме тех случаев, когда индексы j и k равны. Но дело в том, что базис Котельникова ортогонален только на бесконечном интервале времени, а в практических случаях он сильно ограничен, в результате ортогональность на малом интервале нарушается в связи с сильно ограниченным числом элементов ряда Котельни-

кова. Проверим, как влияет это ограничение числа элементов ряда Котельникова на точность восстановления переданного вектора.

Пусть на интервале времени $T = (m + 1)/(2f)$ нам необходимо передать независимо $m = 10$ информационных точек. Примем для определенности верхнюю граничную частоту в спектре сигнала равной $f_v = 3000$ Гц. На рис. 3 приведены все 10 базисных функций для данного примера.

Из анализа рис. 3 можно заметить, что первая и последняя базисные функции не могут точно описать принятый сигнал, поскольку их первые боковые всплески не имеют симметричного описания относительно центрального максимума, поэтому их, возможно, следует исключить из базиса.

Обозначим ковариационную матрицу для указанных условий

$$M_{i,k} = 2f \int_{-T}^T \operatorname{sinc} \left[2\pi f \left(t - \frac{j}{2f} \right) \right] \times \operatorname{sinc} \left[2\pi f \left(t - \frac{k}{2f} \right) \right] dt$$

и вычислим ее, оформив в виде табл. 1.

Анализируя данную матрицу, можно заметить, что она далека от ортогональности: на главной диагонали не стоят единицы, то есть отсчеты переданного вектора восстановлены с ошибками. Кроме того, первое и последнее число на главной диагонали сильно отличаются от единицы, поэтому первую и последнюю базисные функции необходимо исключить из базиса. В этом случае точно восстановить можно будет не все 10 отсчетов информационного вектора, а только 8, что и показано на рис. 4.

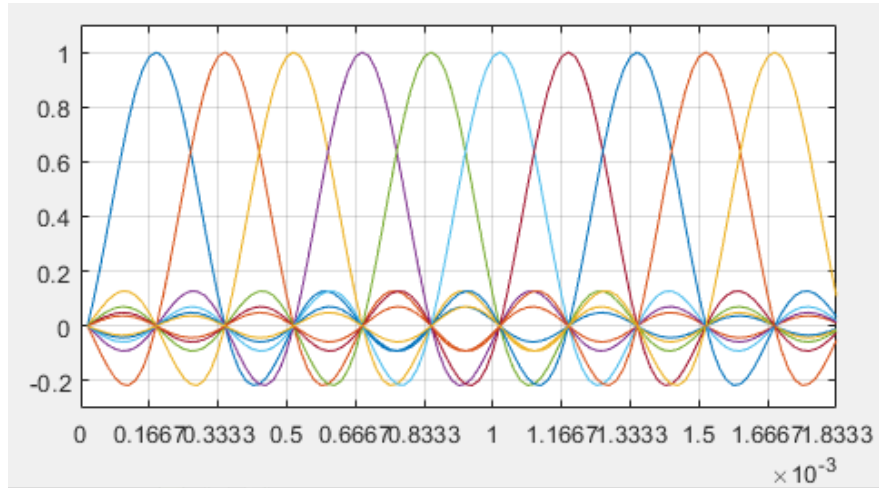


Рис. 3. Базисные функции

Таблица 1

Ковариационная матрица 10 отсчетов информационного вектора

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,9657	0,0404	-0,0336	0,0297	-0,0271	0,0255	-0,0245	0,0241	-0,0244	0,0262
2	0,0404	0,9891	0,0269	-0,0243	0,0227	-0,0217	0,0213	-0,0213	0,0221	-0,0244
3	-0,0336	0,0269	0,9968	0,0217	-0,0206	-0,0200	-0,0199	0,0202	-0,0213	0,0241
4	0,0297	-0,0243	0,0217	1,0001	0,0195	-0,0191	0,0192	-0,0199	0,0213	-0,0245
5	-0,0271	0,0227	-0,0206	0,0195	1,0015	0,0188	-0,0191	0,0200	-0,0217	0,0255
6	0,0255	-0,0217	0,0200	-0,0191	0,0188	1,0015	0,0195	-0,0206	0,0227	-0,0271
7	-0,0245	0,0213	-0,0199	0,0192	-0,0191	0,0195	1,0001	0,0217	-0,0243	0,0297
8	0,0241	-0,0213	0,0202	-0,0199	0,0200	-0,0206	0,0217	0,9968	0,0269	-0,0336
9	-0,0244	0,0221	-0,0213	0,0213	-0,0217	0,0227	-0,0243	0,0269	0,9891	0,0404

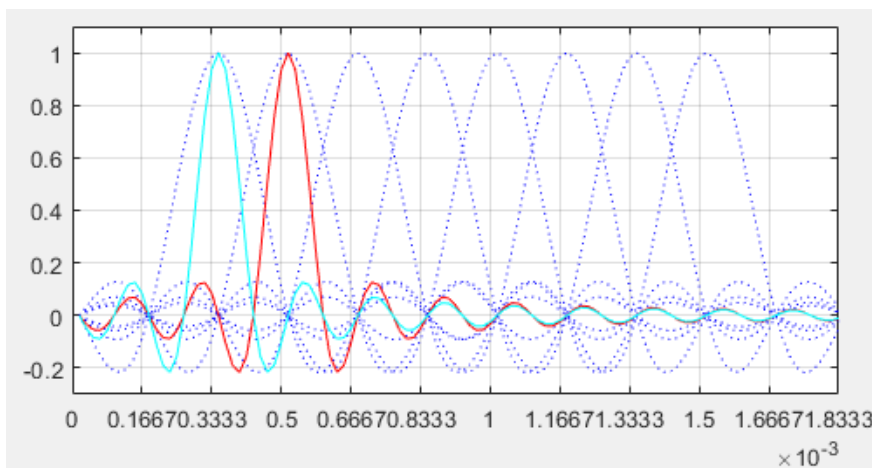


Рис. 4. 8 базисных функций (пунктирные линии), которые могут достаточно точно воспроизвести переданный вектор

После исключения первой и последней точек получим ковариационную матрицу в виде табл. 2.

Анализируя табл. 2, можно заметить, что точность восстановления сигнала заметно повысилась: значения на главной диагонали приблизились

к единице, а остальные значения заметно уменьшились, но поскольку матрица не единичная, то ортогональность базиса не обеспечивается.

На рис. 4 также приведены базисные функции с удвоенной верхней граничной частотой (голубая

Ковариационная матрица 8 отсчетов информационного вектора

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,9693	0,0263	-0,0238	0,0222	-0,0213	0,0208	-0,0209	0,0217
2	0,0263	0,9796	0,0213	-0,0202	0,0196	-0,0195	0,0198	-0,0209
3	-0,0238	0,0213	0,9801	0,0191	-0,0188	0,0189	-0,0195	0,0208
4	0,0222	-0,0202	0,0191	0,9815	0,0184	-0,0188	0,0196	-0,0213
5	-0,0213	0,0196	-0,0188	0,0184	0,9815	0,0191	-0,0202	0,0222
6	0,0208	-0,0195	0,0189	-0,0188	0,0191	0,9801	0,0213	-0,0238
7	-0,0209	0,0198	-0,0195	0,0196	-0,0202	0,0213	0,9769	0,0263
8	0,0217	-0,0209	0,0208	-0,0213	0,0222	-0,0238	0,0263	0,9693

и красная линии). Первая и вторая базисные функции (пунктирные линии) пересекаются в момент времени, соответствующий точке пересечения голубой и красной базисных функций (которые в этот момент времени принимают значение, равное нулю, и которые используются в качестве импульсных характеристик идеального ФНЧ при приеме сигнала). В этот момент времени первая и вторая базисные функции принимают значение 0,64, что в сумме даст значение 1,28. Если обе эти базисные функции будут передавать информацию о том, что первая и вторая информационные точки входного вектора равны 1, то значение между ними, равное 1,28, будет не сильно изменять спектр синтезируемого сигнала, то есть первая и вторая базисные функции, имея каждая верхнюю граничную частоту спектра равной f_v , обеспечивают верхнюю граничную частоту их суммы также равной f_v . Поэтому спектр синтезируемого сигнала в процессе выполнения операции (1) остается ограниченным частотой f_v .

Вместе с тем на приемной стороне в процессе восстановления переданного вектора применение в формуле (4) в качестве импульсной характеристики идеального фильтра низких частот функции отсчетов, использованной в формуле (1), приводит к неточному восстановлению переданного вектора за счет того, что отсчеты, формируемые базисными функциями (1), являются коррелированными в точке пересечения этих базисных функций, что и приводит к результату, отображенному в ковариационной матрице (табл. 1).

Если же при восстановлении сигнала на приемной стороне в качестве импульсной характери-

ки идеального фильтра низких частот в формуле (4) использовать базисные функции с удвоенной верхней граничной частотой, то ошибок восстановления можно избежать. В этом случае формула (4) преобразуется к виду:

$$A_{v_k} = \sum_{j=0}^{n-1} A_j 4f \int_{-T}^T \text{sinc} \left[2\pi f \left(t - \frac{j}{2f} \right) \right] \times \text{sinc} \left[4\pi f \left(t - \frac{k}{2f} \right) \right] dt, \tag{5}$$

а ковариационная матрица примет вид:

$$M_{i,k} = 4f \int_{-T}^T \text{sinc} \left[2\pi f \left(t - \frac{j}{2f} \right) \right] \times \text{sinc} \left[4\pi f \left(t - \frac{k}{2f} \right) \right] dt.$$

Расчеты этой ковариационной матрицы дают значения, приведенные в табл. 3.

Анализируя табл. 3 и сравнивая ее значения с табл. 2, можно заметить, что точность восстановления значительно повысилась, но полной ортогональности нет, поскольку ковариационная матрица не является единичной.

Основной причиной данных результатов является то, что выбранный базис в виде функции $\text{sinc}(x)$ не является ортогональным на малом интервале времени. Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти такой базис, который будет ортогональным на заданном, достаточно малом, интервале времени, и при этом спектр базисных функций должен располагаться не выше частоты f_v .

Ковариационная матрица 8 отсчетов информационного вектора с удвоенной верхней граничной частотой

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,9991	5,1259e-04	-3,4597e-04	2,5192e-04	-1,8894e-04	1,3839e-04	-8,5432e-05	3,4868e-17
2	-5,1259e-04	1,0003	-1,7935e-04	1,2159e-04	-8,1057e-05	4,4837e-05	5,5511e-17	-8,5432e-05
3	-3,4597e-04	1,7935e-04	0,9999	6,3821e-05	-3,1911e-05	1,6653e-17	4,4837e-05	-1,3839e-04
4	-2,5192e-04	1,2159e-04	-6,3821e-05	1,0000	9,9920e-17	-3,1911e-05	8,1057e-05	-1,8894e-04
5	-1,8894e-04	8,1057e-05	-3,1911e-05	2,2204e-17	1,0000	-6,3821e-05	1,2159e-04	-2,5192e-04
6	-1,3839e-04	4,4837e-05	8,0491e-17	-3,1911e-05	6,3821e-04	0,9999	1,7935e-04	-3,4597e-04
7	-8,5432e-05	8,8124e-17	4,4837e-05	-8,1057e-05	1,2159e-04	1,7935e-04	1,0003	-5,1259e-04
8	3,5388e-17	-8,5432e-05	1,3839e-04	-1,8894e-04	2,5192e-04	-3,4597e-04	5,1259e-04	0,9991

Постановка задачи

Предполагается, что информация в канал связи будет передаваться сигнальными конструкциями, заданными на некотором интервале, причем конструкции, расположенные в смежных интервалах, не должны оказывать взаимного влияния, а элементы, используемые внутри интервалов, должны быть строго ортогональными.

Необходимо найти такую базисную функцию, которая в области центрального пика будет вести себя аналогично функции sinc(x), иметь ограниченный спектр, но при этом на краях выбранного интервала времени T она должна быть тождественно равной нулю. Возможным решением данной задачи может являться поэлементное произведение функции sinc(x), пик которой сдвинут на середину временного интервала T и косинуса, половина периода которого равна интервалу T, и который сдвинут по фазе на половину длительности интервала T. Тогда функция примет вид:

$$\gamma(f, t, k) = \text{sinc} \left[2\pi f \left(t - \frac{T}{2} \right) \right] \cos \left[\frac{\pi}{T} \left(t - \frac{T}{2} \right) \right]. \quad (6)$$

На рис. 5 точками показана функция sinc(x), а сплошной линией — функция (6).

Для дальнейшего использования предлагаемой функции необходимо перейти к дискретным отсчетам. Зададимся частотой дискретизации, равной 60 000 Гц, что в 20 раз превышает верхнюю граничную частоту выбранного диапазона $f_v = 3000$ Гц. В указанном случае общее число дискретных точек составит $n = 110$.

$$\gamma(i, Fd, t, k) = \text{sinc} \left[2\pi f \left(\frac{i}{Fd} - \frac{T}{2} \right) \right] \times \cos \left[\frac{\pi}{T} \left(\frac{i}{Fd} - \frac{T}{2} \right) \right], \quad (7)$$

Теперь первая базисная функция с нулевым сдвигом может быть получена путем циклического сдвига функции (7) на половину периода T. На рис. 6 приведен результат циклического сдвига.

На рис. 7 пунктиром приведены 8 базисных функций, полученных в результате циклического сдвига функции (7), и первые базисные функции, используемые для восстановления информационного вектора.

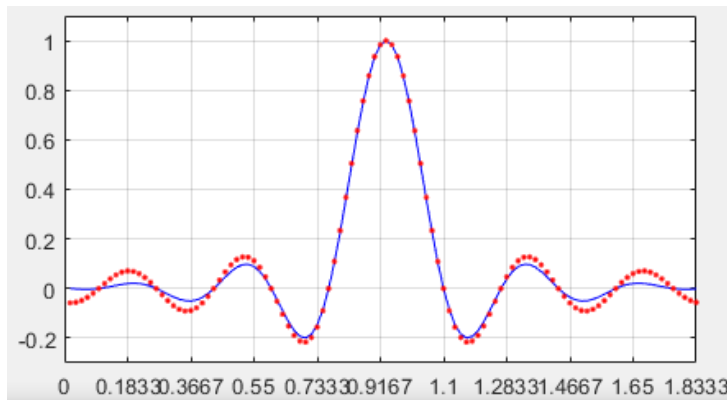


Рис. 5. Модифицированная функция отсчетов и функция sinc(x)

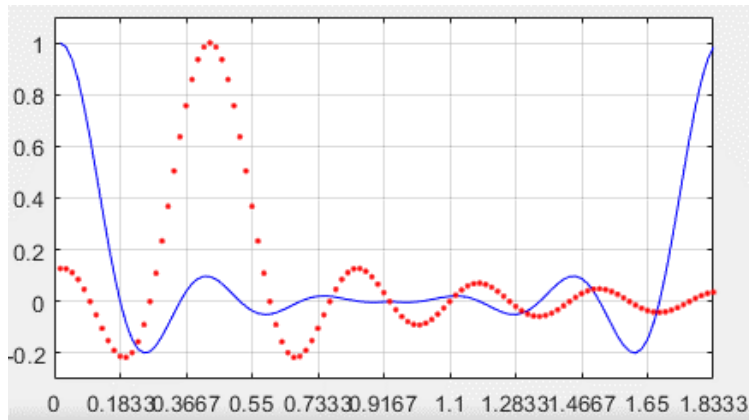


Рис. 6. Синтезированная периодическая базисная функция (сплошная линия) и функция sinc(x)

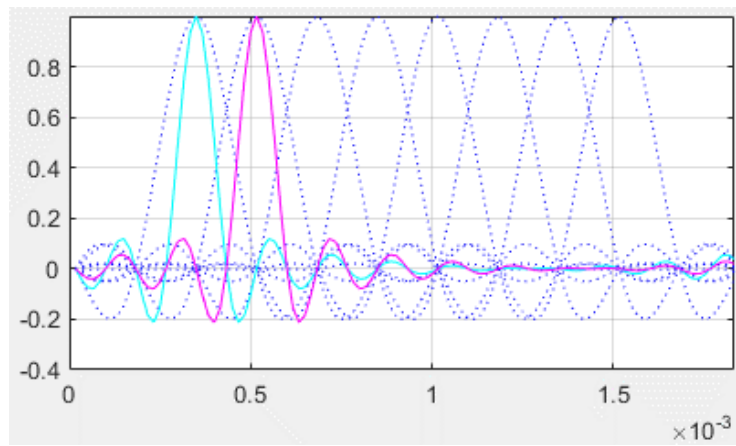


Рис. 7. Семейство аппроксимирующих базисных функций и базисные функции для восстановления информационного вектора

Таблица 4

Ковариационная матрица итоговых базисных матриц

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1,0000	2,1980e-05	4,4870e-05	4,4751e-05	1,5276e-04	4,3793e-04	4,3793e-04	1,5276e-04
2	2,1980e-05	1,0000	2,1980e-05	4,4870e-05	4,4751e-05	1,5276e-04	4,3793e-04	4,3793e-04
3	4,4870e-05	2,1980e-05	1,0000	2,1980e-05	4,4870e-05	4,4751e-05	1,5276e-04	4,3793e-04
4	4,4751e-05	4,4870e-05	2,1980e-05	1,0000	2,1980e-05	4,4870e-05	4,4751e-05	1,5276e-04
5	1,5276e-04	4,4751e-05	4,4870e-05	2,1980e-05	1,0000	2,1980e-05	4,4870e-05	4,4751e-05
6	4,3793e-04	1,5276e-04	4,4751e-05	4,4870e-05	2,1980e-05	1,0000	2,1980e-05	4,4870e-05
7	4,3793e-04	4,3793e-04	1,5276e-04	4,4751e-05	4,4870e-05	2,1980e-05	1,0000	2,1980e-05
8	1,5276e-04	4,3793e-04	4,3793e-04	1,5276e-04	4,4751e-05	4,4870e-05	2,1980e-05	1,0000

В табл. 4 приведена ковариационная матрица базисов синтеза и анализа сигнала, обладающего ограниченным спектром на заданном интервале времени. С вычислительной точки зрения эту матрицу уже можно считать единичной: на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы близки к нулю, причем элементы главной диагонали с высокой точностью равны единице.

Построение сигналов на основе предложенного базиса

На рис. 8 приведен текст программы для среды MATLAB, которая демонстрирует процессы генерации ортогонального базиса и использования его для синтеза сигнала в заданном компакте по времени и занимаемой полосе частот. Текст программы дополнен нумерацией строк для пояснения производимых действий.

```

SiTanProv_1.m  +
1      A=[1 1 1 1 1 -1 -1 1 1 -1 1 -1 1];
2      m=15; f=3000; Fd= 20*f;   T=(m+1)/(2*f); n=round(T*Fd); dd=Fd/(2*f);
3      B=sinc(2*f.*((1:n)-1)/Fd-T/2)).*cos((pi/T).*((1:n)-1)/Fd-T/2));
4      B2=sinc(4*f.*((1:n)-1)/Fd-T/2)).*cos((pi/T).*((1:n)-1)/Fd-T/2));
5      Baz0=circshift(B,n/2); Baz2=circshift(B2,n/2);
6      for k=1:m-2; Ba(k,:)=circshift(Baz0,(k+1).*dd); end
7      for k=1:m-2; Ba2(k,:)=circshift(Baz2,(k+1).*dd); end
8      W=(Ba*Ba').*(2*f/Fd); W2=(Ba2*Ba').*(4*f/Fd);
9      Sp(1:m-2,:)=fft(Ba(1:m-2,:));
10     Sig=A*Ba; Av=Ba2*Sig'.*(4*f/Fd); SpS=fft(Sig);
11     subplot(131)
12     plot(((1:n)-1)/Fd,Sig,'b',((1:m-2)+1)/(2*f),A(1:m-2),'+k'); hold on
13     plot(((1:m-2)+1)/(2*f),Av(1:m-2),'or'); grid on; xlim([0 T]); hold off
14     subplot(132)
15     plot(real(SpS(1,1:n)),imag(SpS(1,1:n)),'*b');
16     grid on; ylim([-50 50]); axis equal;
17     subplot(133)
18     plot((1:n)/(T*1000),real(SpS(1,1:n)),'*b'); hold on
19     plot((1:n)/(T*1000),imag(SpS(1,1:n)),'or'); hold off
20     grid on; xlim([0 4]); ylim([-40 40]); xticks(1:0.5:4)
    
```

Рис. 8. Программа математического моделирования ортогонального базиса и процессов синтеза и анализа сигналов для узкополосного канала связи

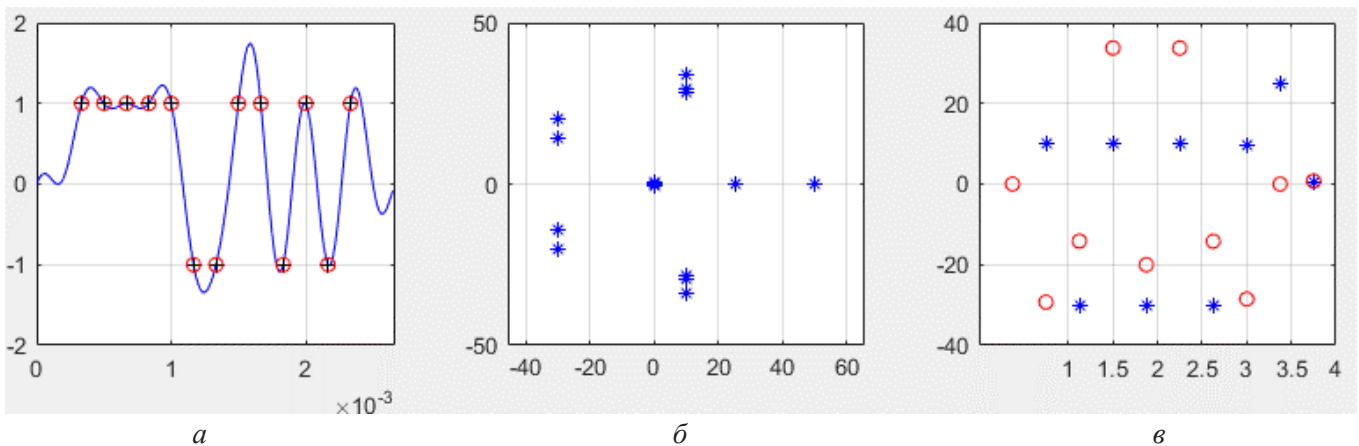


Рис. 9. Основные результаты расчета: *a* — сформированный сигнал, информационный вектор *A* и восстановленный вектор *Av*; *б* — комплексные спектральные числа вектора *Sig* на фазовой плоскости; *в* — действительные и мнимые компоненты энергетического спектра сигнала

Идентификаторы основных расчетных векторов и матриц:

- *A* — входной информационный вектор-строка, представленный 13-позиционным кодом Баркера (рис. 2), в котором значение «0» заменено на «-1»;
- *B* — порождающий вектор для формирования базиса синтеза *Ba* (модуляция);
- *B2* — порождающий вектор для формирования базиса анализа *B2* (демодуляция);
- *W* — корреляционная матрица базиса синтеза;
- *W2* — ковариационная матрица матриц синтеза и анализа;
- *Sig* — вектор-строка сформированного сигнала для передачи в канал;

– *Av* — восстановленный информационный вектор.

В строке 10 приведены основные матричные операции синтеза сигнала *Sig* и восстановления информационного вектора *Av*.

В строках 11–20 приведены процедуры вывода результатов расчета. Вариант таких результатов представлен на рис. 9. На рис. 9, *a* приведен синтезированный сигнал (сплошная линия), знаком «+» отображен переданный вектор, знаком «o» — принятый вектор. На рис. 9, *б* показан фазовый спектр синтезированного сигнала, а на рис. 9, *в* — комплексные числа энергетического спектра на оси частот в кГц.

Заключение

1. Моделирование процессов передачи различных сигналов в заданной полосе с использованием описанных базисов привело авторов к утверждению, что при отсутствии шума полностью и безошибочно восстановить финитный сигнал в ограниченный промежуток времени все-таки можно. Но это возможно только в том случае, если ортогональный базис построен именно для этого интервала времени и если количество передаваемых информационных отсчетов соответствует числу ортогональных функций, синтезированных для этого интервала времени.

2. Основные неудачи многих исследователей в восстановлении сигнала с ограниченным спектром при использовании функции отсчетов состояли в том, что они использовали в качестве импульсной характеристики идеального фильтра низких частот ту же функцию отсчетов, с помощью которой

синтезировался сигнал (1). Вместе с тем для существенного повышения точности восстановления сигнала, синтезированного по формуле (1), необходимо использовать базисную функцию с удвоенной верхней частотой (5).

3. Для полного восстановления финитной функции за ограниченное время при отсутствии шумов необходимо использовать и для синтеза, и для анализа базисные функции, специально синтезированные для заданного временного интервала, при этом общее число независимо передаваемых отсчетов должно соответствовать, но не превышать общего числа ортогональных базисных функций, синтезированных для этого временного интервала.

4. В данном исследовании не рассмотрен очень важный вопрос о возможных методах синхронизации шкал времени при синтезе и анализе сигнала в процессах его передачи и приема. Этот вопрос требует изложения в отдельной статье.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Егоров В. В., Ходаковский В. А. Синтез ЛЧМ сигнала в полосе ТЧ с улучшенными свойствами по АКФ и пик-фактору // Современные технологии обработки сигналов (СТОС-2023): Доклады 4-ой Всероссийской конференции (Москва, Россия, 12–13 декабря 2023 г.). М.: Российское научно-техническое общество радиотехники, электроники и связи имени А. С. Попова, 2023. С. 54–59.
2. Егоров В. В., Лобов С. А., Ходаковский В. А. Синтез последовательностей с идеальными автокорреляционными свойствами // Автоматика на транспорте. 2022. Т. 8, № 11. С. 78–89. DOI: 10.20295/2412-9186-2022-8-01-78-89.
3. Булавский П. Е., Василенко М. Н., Ходаковский В. А. Интеллектуальное цифровое управление тональными рельсовыми цепями // Автоматика, связь, информатика. 2022. № 3. С. 2–6. DOI: 10.34649/AT.2022.3.3.001.
4. Гришенцев А. Ю. Метод синтеза алфавитов ортогональных сигнальных широкополосных сообщений // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2018. Т. 18, № 6. С. 1074–1083. DOI: 10.17586/2226-1494-2018-18-6-1074-1083.
5. Синтез сигналов с оптимальными по уровню боковых лепестков автокорреляционными свойствами / В. А. Ходаковский, В. Г. Дегтярев, П. В. Герасименко, С. В. Микони // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2018. Т. 15, Вып. 4. С. 629–636. DOI: 10.20295/1815-588X-2018-4-629-636.
6. Ходаковский В. А., Дегтярев В. Г. О теореме отсчетов и ее применении для синтеза и анализа сигналов с ограниченным спектром // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2017. Т. 14, Вып. 3. С. 562–573.
7. Chonavel T. Orthogonal Signals with Jointly Balanced Spectra: Application to CDMA Transmissions // EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking. 2011. Art. No. 176. 19 p. DOI: 10.1186/1687-1499-2011-176.
8. Петров Д. А. Синтез хорошо-локализованных конечномерных базисов Вейля-Гейзенберга и их применение для построения высокоэффективных алгоритмов обработки сигналов: автореферат дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Петров Дмитрий Андреевич; [Место защиты: Московский гос. ун-т им. М. В. Ломоносова]. М., 2010. 18 с.
9. Волчков В. П., Петров Д. А. Оптимизация ортогонального базиса Вейля-Гейзенберга для цифровых систем связи, использующих принцип OFDM/OQAM передачи // Научные ведомости Белгородского государственного университета. История. Политология. Экономика. Информатика. 2009. № 1 (56), Вып. 9/1. С. 104–112.

10. Volchkov V. P., Petrov D. A. Orthogonal Well-Localized Weyl-Heisenberg Basis Construction and Optimization for Multicarrier Digital Communication Systems // Proceedings of the 2009 International Conference on Ultra Modern Telecommunications & Workshops (ICUMT 2009), (Saint Petersburg, Russia, 12–14 October 2009). Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2009. 4 p. DOI: 10.1109/ICUMT.2009.5345586.

11. Волчков В. П. Сигнальные базисы с хорошей частотно-временной локализацией // Электросвязь. 2007. № 2. С. 21–25.

12. Прокис Дж. Цифровая связь = Digital Communications / пер. с англ. под ред. Д. Д. Кловского. М.: Радио и связь, 2000. 800 с.

13. Mallat S. G. A Wavelet Tour of Signal Processing: Second Edition. San Diego (CA): Academic Press, 1999. 661 p.

14. Haas R., Belfiore J.-C. A Time-Frequency Well-localized Pulse for Multiple Carrier Transmission // Wireless Personal Communications. 1997. Vol. 5, Iss. 1. Pp. 1–18. DOI: 10.1023/A:1008859809455.

15. Muschallik C. Improving an OFDM Reception Using an Adaptive Nyquist Windowing // IEEE Transactions on Consumer Electronics. 1996. Vol. 42, Iss. 3. Pp. 259–269. DOI: 10.1109/30.536046.

16. Петухов А. П. Периодические дискретные всплески // Алгебра и анализ. 1996. Т. 8, Вып. 3. С. 151–183.

Дата поступления: 21.02.2025

Решение о публикации: 07.03.2025

Orthogonal Basis Synthesis at a Finite Time Interval for Digital Signal Processing with Limited Spectrum

Valentin A. Khodakovsky — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Professor of the Department of Computer Science and Information Security. Research interests: mathematical modelling, digital signal processing, information theory. E-mail: hva1104@mail.ru

Vladislav D. Korotchenko — Postgraduate Student of the Department of Electrical Communications. Research interests: mathematical modeling, digital signal processing, information theory. E-mail: vladis147@mail.ru

Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, 9, Moskovsky ave., Saint Petersburg, 190031, Russia

For citation: Khodakovsky V. A., Korotchenko V. D. Orthogonal Basis Synthesis at a Finite Time Interval for Digital Signal Processing with Limited Spectrum. *Intellectual Technologies on Transport*, 2025, No. 2 (42), Pp. 71–82. DOI: 10.20295/2413-2527-2025-242-71-82. (In Russian)

Abstract. *The problem of synthesizing an orthogonal basis for transmitting information over narrow-band communication channels in the presence of noise is considered. **Purpose:** to develop an orthogonal-basis finite-time synthesis method for efficient digital processing of limited-spectrum signals, with the aim of increasing the capacity of digital communication channels. To achieve this goal, the matrix method of signal synthesis and analysis, the MATLAB environment and other innovative approaches were used. **Methods:** theoretical analysis and computer modelling. **Results:** the high potential of using the finite-time orthogonal basis for synthesizing and analyzing limited-spectrum signals has been confirmed. **Practical significance:** improved quality of signal transmission, especially in conditions of limited bandwidth of communication channels contributing to the creation of more efficient and reliable communication systems. **Discussion:** makes recommendations for further improvement of the proposed basis and highlights issues requiring further research and development. This study is important for the development of railway telecommunication technologies in rail transport.*

Keywords: *function basis decomposition, orthogonal basis, approximation, synthesis and analysis of signals, digital signal processing*

REFERENCES

1. Egorov V. V., Khodakovskiy V. A. Sintez LChM signala v polose TCh s uluchshennymi svoystvami po AKF i pik-faktoru [Synthesis of a LFM Signal in the TF Band with Improved Properties by ACF and Peak Factor], *Sovremennyye tekhnologii obrabotki signalov (STOS-2023): Doklady 4-oy Vserossiyskoy konferentsii [Modern Technologies of Signal Processing (MTSP-2023): Proceeding of the Fourth All-Russian Conference]*, Moscow, Russia, December 12–13, 2023. Moscow, A. S. Popov Russian Science and Technical Society, 2023. Pp. 54–59. (In Russian)
2. Egorov V. V., Lobov S. A., Khodakovskiy V. A. Sintez posledovatel'nostey s idealnymi avtokorrelyatsionnymi svoystvami [Synthesis of Sequences with ideal Autocorrelation Properties], *Avtomatika na transporte [Transport Automation Research]*, 2022, Vol. 8, No. 11, Pp. 78–89. DOI: 10.20295/2412-9186-2022-8-01-78-89. (In Russian)
3. Bulavskiy P. E., Vasilenko M. N., Khodakovskiy V. A. Intel'ektualnoe tsifrovoe upravlenie tonalnymi rel'sovymi tsepyami [Intelligent Digital Control Tonal Rail Chains], *Avtomatika, svyaz, informatika [Automation, Communication, Informatics]*, 2022, No. 3, Pp. 2–6. DOI: 10.34649/AT.2022.3.3.001. (In Russian)
4. Grishentsev A. Yu. Synthesis Method for Alphabets of Orthogonal Signaling Broadband Communications, *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2018, Vol. 18, No. 6, Pp. 1074–1083. DOI: 10.17586/2226-1494-2018-18-6-1074-1083. (In Russian)
5. Khodakovskiy V. A., Degtyarev V. G., Gerasimenko P. V., Mikoni S. V. Sintez signalov s optimalnymi po urovnyu bokovykh lepestkov avtokorrelyatsionnymi svoystvami [Design of Signals with Autocorrelated Qualities That Have Optimised Side-Lobe Level], *Izvestiya Peterburgskogo universiteta putey soobshcheniya [Proceedings of Petersburg Transport University]*, 2018, Vol. 15, Iss. 4, Pp. 629–636. DOI: 10.20295/1815-588X-2018-4-629-636. (In Russian)
6. Khodakovskiy V. A., Degtyarev V. G. O teoreme otschetov i ee primenenii dlya sinteza i analiza signalov s ogranichennym spektrom [On Sampling Theorem and Its Application for the Purposes of Synthesis and Analysis of Band-Limited Signals], *Izvestiya Peterburgskogo universiteta putey soobshcheniya [Proceedings of Petersburg Transport University]*, 2017, Vol. 14, Iss. 3, Pp. 562–573. (In Russian)
7. Chonavel T. Orthogonal Signals with Jointly Balanced Spectra: Application to CDMA Transmissions, *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2011, Art. No. 176, 19 p. DOI: 10.1186/1687-1499-2011-176.
8. Petrov D. A. Sintez khorosho-lokalizovannykh konechnomernykh bazisov Veylya-Geyzenberga i ikh primenenie dlya postroeniya vysokoeffektivnykh algoritmov obrabotki signalov [Synthesis of well-localized finite-dimensional Weyl-Heisenberg bases and their application to constructing highly efficient signal processing algorithms]: Abstract of the diss. on competition of a scientific degree PhD (Physics and Math.). Moscow, Lomonosov Moscow State University, 2010, 18 p. (In Russian)
9. Volchkov V. P., Petrov D. A. Optimizatsiya ortogonalnogo bazisa Veylya-Geyzenberga dlya tsifrovyykh sistem svyazi, ispolzuyushchikh printsip OFDM/OQAM peredachi [Orthogonal Weyl-Heisenberg Basis Optimisation for Digital Communication Systems Based on OFDM/OQAM], *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Istoriya. Politologiya. Ekonomika. Informatika [Belgorod State University Scientific Bulletin. History. Political Science. Economics. Information Technologies]*, 2009, No. 1 (56), Iss. 9/1, Pp. 104–112. (In Russian)
10. Volchkov V. P., Petrov D. A. Orthogonal Well-Localized Weyl-Heisenberg Basis Construction and Optimization for Multicarrier Digital Communication Systems, *Proceedings of the 2009 International Conference on Ultra Modern Telecommunications & Workshops (ICUMT 2009)*, Saint Petersburg, Russia, October 12–14, 2009. Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2009. 4 p. DOI: 10.1109/ICUMT.2009.5345586.
11. Volchkov V. P. Signalnye bazisy s khoroshey chastotno-vremennoy lokalizatsiey [Signal bases with good time-frequency localization], *Electrosvyaz Magazine*, 2007, No. 2, Pp. 21–25. (In Russian)
12. Proakis J. G. Tsifrovaya svyaz [Digital Communications]. Moscow, Radio i Svyaz Publ., 2000, 800 p. (In Russian)

13. Mallat S. G. A Wavelet Tour of Signal Processing: Second Edition. San Diego (CA), Academic Press, 1999, 661 p.
14. Haas R., Belfiore J.-C. A Time-Frequency Well-localized Pulse for Multiple Carrier Transmission, *Wireless Personal Communications*, 1997, Vol. 5, Iss. 1, Pp. 1–18. DOI: 10.1023/A:1008859809455.
15. Muschallik C. Improving an OFDM Reception Using an Adaptive Nyquist Windowing, *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, 1996, Vol. 42, Iss. 3, Pp. 259–269. DOI: 10.1109/30.536046.
16. Petukhov A. P. Periodicheskie diskretnye vspleski [Periodic Discrete Wavelets], *Algebra i Analiz*, 1996, Vol. 8, Iss. 3, Pp. 151–183. (In Russian)

Received: 21.02.2025

Accepted: 07.03.2025