

УДК 656.072

Применение рядов Фурье для прогнозирования объемов перевозок пассажиров в пригородном сообщении

С. С. Смирнов

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Российская Федерация, 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9

Для цитирования: Смирнов С. С. Применение рядов Фурье для прогнозирования объемов перевозок пассажиров в пригородном сообщении // Известия Петербургского университета путей сообщения. — СПб.: ПГУПС, 2025. — Т. 22. — Вып. 3. — С. 616–624. DOI: 10.20295/1815-588X-2025-3-616-624

Аннотация

Цель: Для прогнозирования объемов перевозок пассажиров необходим учет неравномерности пассажиропотоков во времени, с чем связана сложность задачи прогнозирования. В данной статье предлагается решение данной задачи с помощью рядов Фурье. **Методы:** Статистические данные о количестве перевезенных пассажиров представлены в виде временного ряда с постоянным периодом. Каждому периоду временного ряда поставлена в соответствие неизвестная функция, значения которой совпадают со значениями временного ряда в исследуемый период. Приближенные значения неизвестных функций выражены частной суммой тригонометрических рядов Фурье. Определенные для каждой функции коэффициенты Фурье поставлены в зависимость от номера периода, после чего по наиболее подходящему тренду подобраны значения коэффициентов функции на прогнозный период. **Результаты:** В ходе исследования подобрана функция, описывающая поведение временного ряда на прогнозный период с высокой достоверностью аппроксимации. Коэффициент детерминации составил 0,94, а средняя абсолютная процентная ошибка — 3,5 %. **Практическая значимость:** Описанный метод прогнозирования может быть применен для определения количества перевезенных пассажиров в условиях сезонной неравномерности пассажиропотока и составления матриц корреспонденций на будущий период.

Ключевые слова: Ряд Фурье, пассажиропоток, матрица корреспонденций, неравномерность, сезонность, пригородные перевозки, прогнозирование.

Введение

Для расчета потребных размеров движения пригородных поездов на участке и составления расписаний с учетом сезонности перевозок требуется иметь прогнозные объемы перевозок. Сложность их прогнозирования заключается в значительной сезонной и пространственной неравномерности пассажиропотока [1, 2].

Сезонность пассажирских перевозок носит колебательный характер, а поэтому имеет смысл использовать методы обработки статистических данных из других областей науки. Метод рядов Фурье является одним из инструментов гармо-

нического анализа, с помощью которого обрабатывают сигналы в электротехнике, где требуется выполнять различные расчеты с неправильными формами кривых, описывающих реальные процессы [3].

Метод рядов Фурье применяется для прогнозирования чисел Вольфа, характеризующих солнечную активность, которая отличается непостоянной цикличностью [4, 5], что подтверждает возможность его применения для схожих сложных процессов. Метод применялся для создания модели прогнозирования временного распределения пассажиропотока на автомобильном транспорте [6].

В настоящей статье рассматриваются пассажиропотоки на основе данных, собранных ежемесячно, и предлагается способ прогнозирования объемов пассажирских перевозок в пригородном сообщении с помощью рядов Фурье на один год вперед.

Формулировка задачи

Задача исследования заключается в том, чтобы по имеющимся статистическим данным за предыдущие периоды подобрать функцию, описывающую поведение временного ряда в будущем.

Сведения о количестве перевезенных пассажиров в предыдущие периоды можно представить в виде последовательности:

$$a_1, a_2, \dots, a_n. \quad (1)$$

В условиях рассматриваемой задачи элементы a_i последовательности (1) измерены через равные промежутки времени Δt при начальном значении $t = 1$, приращении $\Delta t = 1$, $t_i = i$, где $i = 1, 2, \dots, n$, т. е. представленная последовательность является временным рядом [7].

Чтобы не противоречить определению понятия временного ряда, применены среднесуточные значения a , определенные как отношение исходной величины a к количеству дней в этом же месяце.

В табл. 1 представлены среднесуточные значения величины пассажиропотока из Санкт-Петербурга в один из городов-спутников ежемесячно за 6 лет.

Выборка данных в табл. 1 условно разделена на две: с января 2018 г. по декабрь 2022 г. — обучающую, а с января по декабрь 2023 г. — тестовую, чтобы по обучающей выборке подобрать функцию, описывающую поведение временного ряда в тестовый период и сравнить ее значения в этот период с фактическими значениями.

Математическое описание задачи

Задача прогнозирования временных рядов заключается в нахождении функции F :

$$y_{n+d} = F(y_1, y_2, \dots, y_n, d), \quad (2)$$

где $d = (1, 2, \dots, D)$ — отсрочка прогноза, здесь D — период прогнозирования.

Графически значения временного ряда описываются некоторой кривой $y = f(x)$, представленной на рис. 1.

По рис. 1 видно, что кривая имеет постоянный период в 12 измерений (1 год), что связано с сезонной неравномерностью пассажирских перевозок в пригородном сообщении.

Идея прогноза временных рядов методом рядов Фурье заключается в нахождении для каждого периода измерений значений коэффициентов Фурье и прогнозировании их значений по наиболее подходящему тренду, т. е. каждый период временного ряда раскладывается в тригонометрический ряд Фурье [8].

Фактически задача сводится к тому, чтобы найти приближенное выражение некоторой

Таблица 1. Среднесуточные значения пассажиропотока, пасс.

Год	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
2018	9083	10 324	9770	10 915	12 746	12 603	12 406	12 032	12 137	13 503	11 724	11 125
2019	10 099	11 999	11 680	13 362	14 182	15 344	14 376	13 980	14 937	15 021	13 725	13 460
2020	11 393	13 168	11 698	3707	4916	8864	10 517	11 943	14 166	13 276	10 948	10 509
2021	8970	11 553	12 448	13 845	13 378	15 586	14 064	13 215	14 733	14 309	12 547	13 554
2022	10 893	11 486	13 659	14 677	15 340	16 617	15 206	15 345	15 974	15 861	15 065	14 119
2023	12 534	13 968	14 972	15 695	17 074	18 030	16 718	16 714	17 720	17 188	16 755	15 749

функции $y = f(x)$, заданной таблицей ее значений на отрезке $[0; 2\pi]$ — полном периоде исходного временного ряда с шагом $h = 2\pi/n$:

$$y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (3)$$

где n — количество значений функции $y = f(x)$ [9, 10].

Приближенное значение функции выражается частной суммой тригонометрического ряда Фурье:

$$T_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (4)$$

В общем случае коэффициенты Фурье a_0, a_k, b_k определяются по формулам:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, k = 0, 1, \dots, m, \quad (5)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx, k = 0, 1, \dots, m, \quad (6)$$

где m — количество гармоник, с помощью которых осуществляется приближение [9–11].

Подсчитанные для каждого ряда коэффициенты a_0, a_k, b_k сводятся в таблицы по периодам, после чего строятся графики из зависимости от периода с подбором линий тренда, по которым прогнозируются коэффициенты следующего периода [8, 12].

Прогнозные значения коэффициентов подставляются в выражение (4), которое и представляет собой прогнозную функцию $g(x)$. Точность полученных значений прогнозной функции $g(x)$ оценивается средней квадратичной ошибкой [9]:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(x_i) - g(x_i)]^2 dx. \quad (7)$$

Решение задачи

Разложим в тригонометрический ряд Фурье последовательность значений из табл. 1 за 2018 год. Весь период измерений находится в отрезке $[0; 2\pi]$, а равноудаленные по времени значения пассажиропотока заданы $n = 12$ значениями с шагом $h = \pi/6$, что отражено в табл. 2.

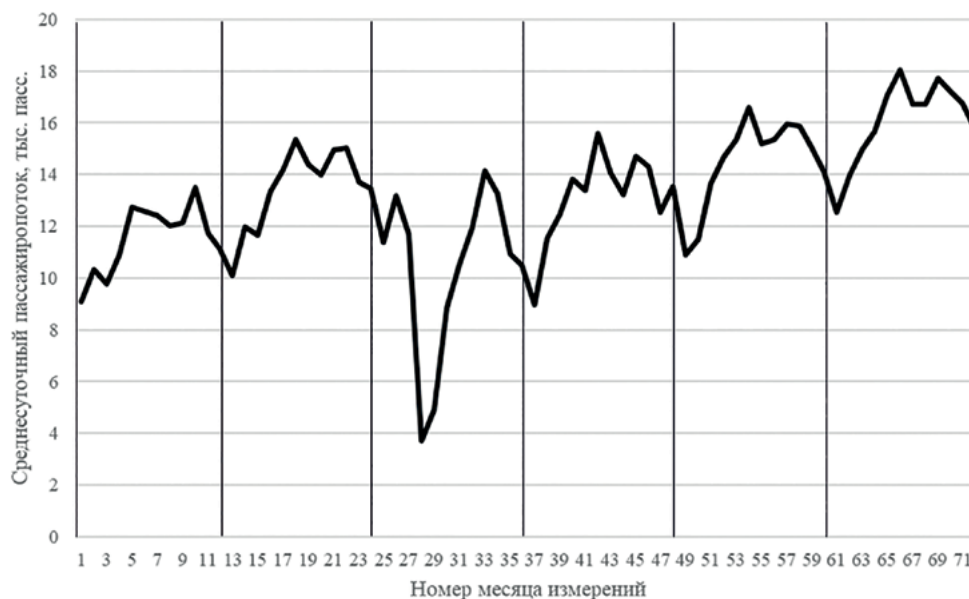


Рис. 1. Графическое изображение значений временного ряда¹

¹ «Провал» значений в третьем периоде кривой связан с влиянием на пассажиропоток предпринятых административных мер в 2020 году, направленных на снижение подвижности населения.

Таблица 2. Значения функции $y = f(x)$, тыс. пасс.

x_i	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$
y_i	9,08	10,32	9,77	10,92	12,75	12,60	12,41	12,03	12,14	13,50	11,72	11,13

Так как функция $y = f(x)$ задана таблицей ее значений, приближенные значения коэффициентов Фурье можно получить по формулам:

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cos kx_i, k = 0, 1, \dots, m, \quad (8)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \sin kx_i, k = 1, 2, \dots, m. \quad (9)$$

Для примера: функция приближена с помощью двух гармоник, т. е. $m = 2$. Тогда значения коэффициентов, полученные из (8) и (9), составляют:

$$a_0 \approx 23,06, a_1 \approx -1,30, a_2 \approx -0,51, \\ b_1 \approx -0,64, b_2 \approx -0,57.$$

Подставим значения полученных коэффициентов в выражение (4):

$$T_m(x) = 11,53 - 1,30 \cos x - 0,51 \sin x - \\ - 0,64 \cos 2x - 0,57 \sin 2x.$$

На рис. 2 сравниваются график полученной функции с графическим отображением исходного временного ряда.

Коэффициент детерминации (R^2), с помощью которого оценивается достоверность аппроксимации, в данном случае составляет 0,85, что говорит о хорошем качестве построенной модели. Но при проведении расчетов по большому количеству направлений было выявлено, что для минимизации отклонений от исходных рядов целесообразно выполнять приближение функции по пяти гармоникам ($m = 5$), так как коэффициент детерминации достигает значений, близких к единице, а накопленная квадратичная ошибка и средняя абсолютная процентная ошибка минимальны, что отражено в табл. 3.

На графике, представленном на рис. 3, наглядно видно хорошее качество приближения к исходному ряду даже по году с большими колебаниями значений пассажиропотока.

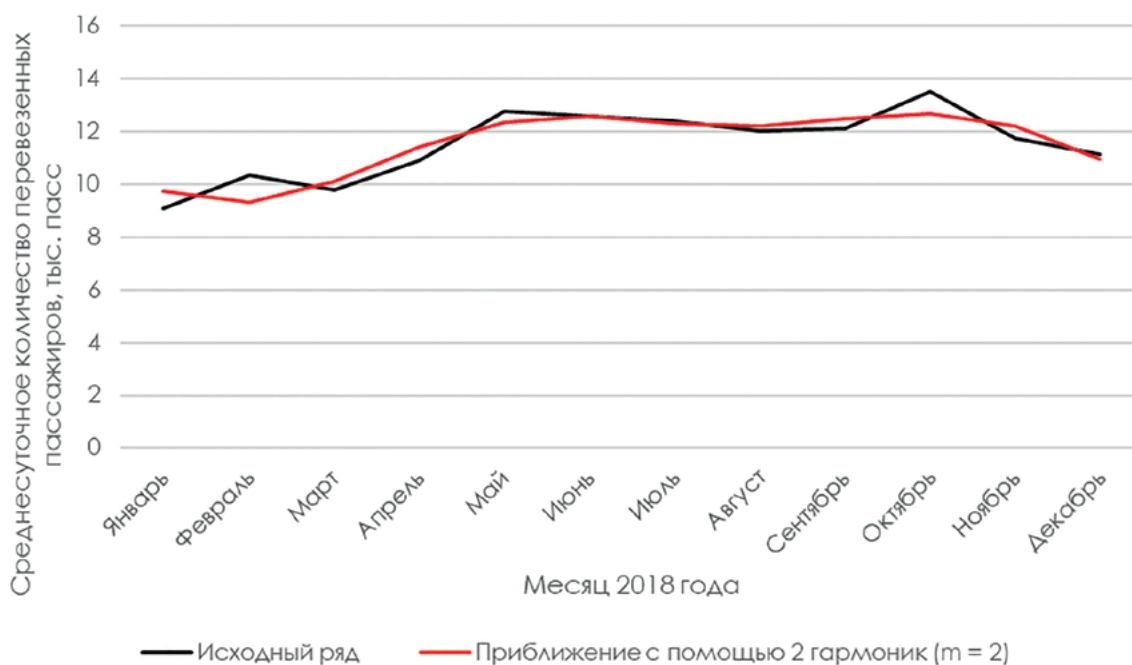


Рис. 2. Сравнение значений полученной функции с исходным рядом

Таблица 3. Показатели, характеризующие достоверность приближения¹

	m											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2018 г.	$\sum(T_i - y_i)^2$	6,46	2,95	2,02	1,82	1,37	1,37	2,98	3,18	4,05	7,56	20,14
	R^2	0,66	0,85	0,89	0,90	0,93	0,94	0,89	0,89	0,86	0,85	0,97
	$[\sum y_i - T_i /\sum y_i] 100$	1,84	1,24	1,03	0,98	0,85	0,85	1,25	1,29	1,45	1,99	3,24
2019 г.	$\sum(T_i - y_i)^2$	8,61	4,12	3,66	2,83	1,62	1,62	2,16	2,99	3,75	8,24	26,07
	R^2	0,67	0,84	0,86	0,89	0,94	0,95	0,94	0,93	0,91	0,88	0,99
	$[\sum y_i - T_i /\sum y_i] 100$	1,81	1,25	1,18	1,04	0,78	0,78	0,91	1,07	1,19	1,77	3,15
2020 г.	$\sum(T_i - y_i)^2$	59,34	21,76	6,60	1,37	2,34	2,34	1,23	6,46	29,81	67,40	120,77
	R^2	0,47	0,81	0,94	0,99	0,98	0,98	0,99	0,95	0,82	0,83	0,93
	$[\sum y_i - T_i /\sum y_i] 100$	6,16	3,73	2,05	0,94	1,22	1,22	0,89	2,03	4,36	6,56	8,78
2021 г.	$\sum(T_i - y_i)^2$	15,62	10,69	9,93	5,07	3,24	3,24	3,94	8,80	10,12	15,04	31,61
	R^2	0,51	0,67	0,69	0,84	0,90	0,92	0,93	0,90	0,89	0,90	1,00
	$[\sum y_i - T_i /\sum y_i] 100$	2,50	2,07	1,99	1,42	1,14	1,14	1,25	1,87	2,01	2,45	3,55
2022 г.	$\sum(T_i - y_i)^2$	10,94	2,83	2,33	0,33	0,33	0,33	0,33	2,34	2,74	10,84	33,62
	R^2	0,68	0,92	0,93	0,99	0,99	0,99	0,99	0,95	0,94	0,89	1,00
	$[\sum y_i - T_i /\sum y_i] 100$	1,90	0,97	0,88	0,33	0,33	0,33	0,33	0,88	0,95	1,89	3,33



Рис. 3. Сравнение значений полученной функции с исходным рядом

¹ В таблице серой заливкой показаны приемлемые значения накопленной суммы квадратов отклонений (не более 3,50), коэффициентов детерминации (не менее 0,90) и средней абсолютной процентной ошибки (не более 1,20).

Таблица 4. Коэффициенты Фурье (по косинусам)

Коэффициенты	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2018	23,06	-1,30	-0,51	0,01	-0,05	-0,38
2019	27,03	-1,58	-0,63	-0,09	-0,30	-0,46
2020	20,85	0,86	1,05	-0,45	-0,70	0,03
2021	26,37	-1,64	-0,79	-0,33	-0,39	-0,58
2022	29,04	-1,85	-0,95	-0,29	-0,36	-0,02
Прогноз на 2023	33,21	-1,96	-1,04	-0,48	-0,57	-0,10

Таблица 5. Коэффициенты Фурье (по синусам)

Коэффициенты	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
2018	-0,64	-0,57	0,39	0,17	-0,26
2019	-0,69	-0,59	0,26	-0,22	0,12
2020	-2,86	2,27	1,52	-0,62	-0,40
2021	-0,26	-0,45	0,14	-0,81	0,16
2022	-0,61	-0,68	-0,03	-0,45	-0,02
Прогноз на 2023	-0,62	-0,70	-0,11	-0,09	0,08

Таблица 6. Сопоставление значений исходной функции с прогнозной

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
x_i	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$
y_i	12,53	13,97	14,97	15,70	17,07	18,03	16,72	16,71	17,72	17,19	16,76	15,75
g_i	12,54	13,59	15,83	16,57	17,92	18,31	17,45	17,79	17,93	17,59	17,97	15,79
$(g_i - y_i)^2$	0,00	0,14	0,74	0,76	0,71	0,08	0,54	1,16	0,04	0,16	1,48	0,00
$ g_i - y_i $	0,01	0,38	0,86	0,87	0,85	0,28	0,73	1,08	0,21	0,40	1,21	0,04
$(g_i - y_i / y_i)100$	0,02	2,70	5,74	5,55	4,94	1,56	4,40	6,45	1,17	2,31	7,25	0,27

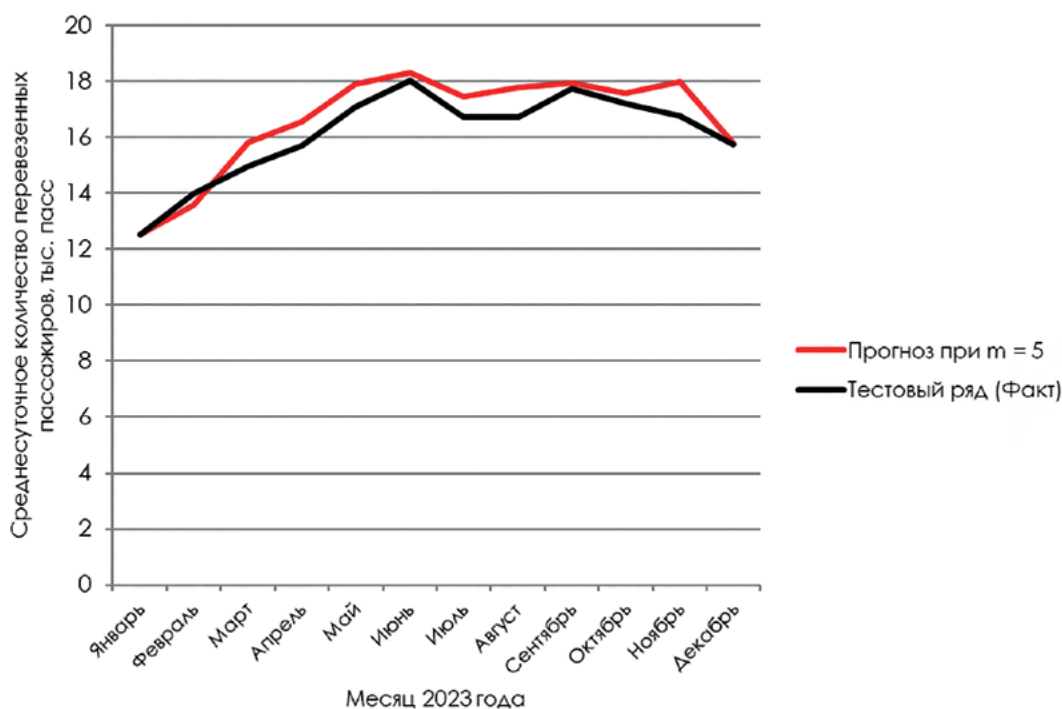


Рис. 4. Графическое сравнение кривых, описывающих прогнозный и исходный ряды

Значения коэффициентов Фурье, полученные из (8) и (9), сведены по периодам в табл. 4 и табл. 5 с прогнозом значений этих коэффициентов на период тестовой выборки —

на 2023 год. При этом прогнозные значения подобраны по наиболее подходящим линиям тренда для каждого коэффициента в отдельности.

По полученным коэффициентам, выполнив подстановку в выражение (3), получим прогнозную функцию $g(x)$:

$$g(x) = 16,61 - 1,96 \cos x - 0,62 \sin x - 1,04 \cos 2x - 0,7 \sin 2x - 0,48 \cos 3x - 0,11 \sin 3x - 0,57 \cos 4x - 0,09 \sin 4x - 0,1 \cos 5x + 0,08 \sin 5x. \quad (10)$$

В табл. 6 сведены значения функции (10) и исходного ряда, а на рис. 5 сопоставлены графики их значений.

Заключение

Коэффициент детерминации для прогнозной функции составил 0,94, т. е. модель хорошо объясняет поведение временного ряда в прогнозный период. Средняя квадратичная ошибка из (8) рассчитана как сумма квадратов отклонений, отнесенная к количеству измерений, и составила 0,48. Среднее абсолютное отклонение определено как сумма абсолютных отклонений, отнесенная к количеству измерений, и составило 0,58 тыс. пасс. Средняя абсолютная процентная ошибка составила 3,5 %, что подтверждает качество прогноза.

Полученная функция позволяет спрогнозировать количество перевезенных пассажиров с высокой точностью с учетом сезонной неравномерности. Метод может быть применен в дальнейшем для составления матриц корреспонденций на прогнозный период в один год, что позволит определить минимально необходимые размеры движения пригородных поездов и дополнительные, назначение которых требуется для покрытия сезонных колебаний пассажиропотока.

Список источников

1. Филиппов А. Г. Определение потребных размеров движения пригородных поездов с учетом суточной и внутрисуточной неравномерностей распределения пассажиропотока / А. Г. Филиппов, С. С. Смирнов, Д. В. Язев

и др. // Известия Петербургского университета путей сообщения. — 2021. — Т. 18. — № 4. — С. 528–536. — DOI: 10.20295/1815-588X-2021-4-528-536.

2. Смирнов С. С. Применение корреляционного анализа при определении факторов влияния на месячные объемы перевозок в пригородном сообщении / С. С. Смирнов, В. В. Костенко // Известия Петербургского университета путей сообщения. — 2025. — Т. 22. — № 1. — С. 19–31. — DOI: 10.20295/1815-588X-2025-1-19-31.

3. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория / Д. Бриллинджер. — М.: Мир, 1980. — 536 с.

4. Гатин П. А. Исследование циклических временных рядов с переменной циклическостью методом рядов Фурье / П. А. Гатин, В. Н. Семенова // Вестник Димитровградского инженерно-технологического института. — 2018. — № 1(15). — С. 91–95.

5. Котляров О. Л. Нелинейная динамика и анализ временных рядов / О. Л. Котляров, А. Ю. Лоскутов // Проблемы анализа риска. — 2004. — Т. 1. — № 2. — С. 160–177.

6. Ие О. Н. Прогнозирование временного распределения пассажиропотока на автомобильном транспорте на основе методов гармонического анализа / О. Н. Ие // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. — 2023. — № 2(58). — С. 23–30.

7. Кильдишев Г. С. Анализ временных рядов и прогнозирование / Г. С. Кильдишев, А. А. Френкель. — М.: Статистика, 1973. — 104 с.

8. Семенова В. Н. Приложение рядов Фурье к исследованию циклических временных рядов с небольшим периодом / В. Н. Семенова, П. А. Гатин // Вестник Димитровградского инженерно-технологического института. — 2017. — № 2(13). — С. 42–47.

9. Клепикова Л. С. Гармонический анализ: методические указания к лабораторной работе / Л. С. Клепикова, Л. А. Кухаренко. — Ленинград: ЛИИЖТ, 1987. — 16 с.

10. Мелентьев П. В. Приближенные вычисления / П. В. Мелентьев. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. — 390 с.

11. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа: учеб. пособие / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: Физматлит, 2004. — 572 с.

12. Семенова В. Н. Об одном подходе к исследованию временных рядов с постоянной циклическостью / В. Н. Семенова, П. А. Гатин // Развитие и перспективы вузовской науки и образования в современных условиях: сборник научных статей итоговой научной конференции

профессорско-преподавательского состава. — Дмитровград: ДИТИ НИЯУ МИФИ, 2017. — С. 48–51.

Дата поступления: 12.04.2025

Решение о публикации: 30.05.2025

Контактная информация:

СМИРНОВ Сергей Сергеевич — аспирант;
sss1999@inbox.ru

Predicting Suburban Passenger Traffic Flows Using the Fourier Series

S. S. Smirnov

Emperor Alexander I Petersburg State Transport University, 9, Moskovsky pr., Saint Petersburg, 190031, Russian Federation

For citation: Smirnov S. S. Predicting Suburban Passenger Traffic Flows Using the Fourier Series // *Proceedings of Petersburg State Transport University*, 2025, vol. 22, iss. 3, pp. 616–624. (In Russian) DOI: 10.20295/1815-588X-2025-3-616-624

Summary

Purpose: Predicting passenger traffic volumes is a complicated task because of the uneven passenger flows in time. This paper proposes a solution to this issue using the Fourier series. **Methods:** The statistics on the number of passengers transported are presented in a time series that has a fixed period. Each period of the time series is assigned an unknown function that matches the values of the time series in the period under study. The expression of approximate values of unknown functions is achieved by a partial sum of trigonometric Fourier series. The Fourier coefficients for each function are determined by the period number. The coefficients of the function for the forecast period are selected in accordance with the most appropriate trend. **Results:** The study involved selecting that explains the behavior of a time series during the forecast period with high approximation reliability. The deviation coefficient was 0.94 and the total deviation was 3.5%. **Practical significance:** The forecasting method described can be used to determine the transported passenger volumes, taking into account the seasonal unevenness of passenger traffic, and mobility plans can be created for the future.

Keywords: Fourier series, passenger traffic, mobility plan, unevenness, seasonality, suburban transportation, forecasting.

References

1. Filippov A. G., Smirnov S. S., Yazev D. V. et al. Opredelenie potrebnikh razmerov dvizheniya prigorodnykh poezdov s uchetom sutochnoy i vnutrisutochnoy neravnomernostey raspredeleniya passazhiropotoka [Determination of the required volumes of commuter train traffic taking into account daily and intraday unevenness in the distribution of

passenger traffic]. *Izvestiya Peterburgskogo universiteta putey soobshcheniya* [Proceedings of Petersburg Transport University]. 2021, vol. 18, Iss. 4, pp. 528–536. DOI: 10.20295/1815-588X-2021-4-528-536. (In Russian)

2. Smirnov S. S., Kostenko V. V. Primenenie korrelyatsionnogo analiza pri opredelenii faktorov vliyaniya na mesyachnye ob"emy perezovok v prigorodnom

soobshchenii [Application of correlation analysis in determining factors influencing monthly traffic volumes in commuter traffic]. *Izvestiya Peterburgskogo universiteta putey soobshcheniya* [Proceedings of Petersburg Transport University]. 2025, vol. 22, Iss. 1, pp. 19–31. DOI: 10.20295/1815-588X-2025-1-19-31. (In Russian)

3. Brillindzher D. *Vremennye ryady. Obrabotka dannykh i teoriya* [Time Series. Data Processing and Theory]. Moscow: Mir Publ., 1980, 536 p. (In Russian)

4. Gatin P. A., Semenova V. N. Issledovanie tsiklicheskih vremennykh ryadov s peremennoy tsiklichnost'yu metodom ryadov Fur'e [Study of Cyclical Time Series with Variable Cyclicity by the Fourier Series Method]. *Vestnik Dimitrovgradskogo inzhenerno-tekhnologicheskogo instituta* [Bulletin of the Dimitrovgrad Engineering and Technological Institute]. 2018, Iss. 1(15), pp. 91–95. (In Russian)

5. Kotlyarov O. L., Loskutov A. Yu. Nelineynaya dinamika i analiz vremennykh ryadov [Nonlinear Dynamics and Analysis of Time Series]. *Problemy analiza riska* [Problems of Risk Analysis]. 2004, vol. 1, Iss. 2, pp. 160–177. (In Russian)

6. Ie O. N. Prognozirovaniye vremennogo raspredeleniya passazhiropotoka na avtomobil'nom transporte na osnove metodov garmonicheskogo analiza [Forecasting the temporal distribution of passenger traffic in road transport based on harmonic analysis methods]. *Vestnik Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta putey soobshcheniya* [Bulletin of the Ural State Transport University]. 2023, Iss. 2(58), pp. 23–30. (In Russian)

7. Kil'dishev G. S., Frenkel' A. A. *Analiz vremennykh ryadov i prognozirovaniye* [Time series analysis and forecasting]. Moscow: Statistika Publ., 1973, 104 p. (In Russian)

8. Semenova V. N., Gatin P. A. Prilozheniye ryadov Fur'e k issledovaniyu tsiklicheskih vremennykh ryadov s nebol'shim periodom [Application of Fourier series to the

study of cyclic time series with a small period]. *Vestnik Dimitrovgradskogo inzhenerno-tekhnologicheskogo instituta* [Bulletin of the Dimitrovgrad Engineering and Technological Institute]. 2017, Iss. 2(13), pp. 42–47. (In Russian)

9. Klepikova L. S., Kukhareenko L. A. *Garmonicheskiy analiz: metodicheskie ukazaniya k laboratornoy rabote* [Harmonic Analysis: Guidelines for Laboratory Work]. Leningrad: LIIZhT Publ., 1987, 16 p. (In Russian)

10. Melent'ev P. V. *Priblizhennyye vychisleniya* [Approximate Calculations]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1962, 390 p. (In Russian)

11. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza: ucheb. posobie* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis: Textbook]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2004, 572 p. (In Russian)

12. Semenova V. N., Gatin P. A. Ob odnom podkhode k issledovaniyu vremennykh ryadov s postoyannoy tsiklichnost'yu [On one approach to the study of time series with constant cyclicity]. *Razvitie i perspektivy vuzovskoy nauki i obrazovaniya v sovremennykh usloviyakh: sbornik nauchnykh statey itogovoy nauchnoy konferentsii professorsko-prepodavatel'skogo sostava* [Development and prospects of university science and education in modern conditions: a collection of scientific articles from the final scientific conference of the faculty]. Dimitrovgrad: DITI NIYaU MIFI Publ., 2017, pp. 48–51. (In Russian)

Received: April 12, 2025

Accepted: May 30, 2025

Author's information:

Sergey S. SMIRNOV — Postgraduate Student;
sss1999@inbox.ru