УДК 004.891

Исследование чувствительности метода анализа иерархий Т. Саати

Бригаднов Игорь Альбертович[1] — д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры «Информационные и вычислительные системы». Научные интересы: теория принятия решений, математическое моделирование, численный анализ. E-mail: brigadnov@mail.ru

Казимиров Самуил Павлович[2] — магистрант 1-го курса направления 09.04.01 «Информатика и вычислительная техника». Научные интересы: математическое моделирование, программирование, численный анализ. E-mail: samuil.kazimirov@gmail.com

[1]Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Россия, 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9

[2]Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II, Россия, 199106, Санкт-Петербург, Васильевский остров, 21 линия, д. 2

Для цитирования: Бригаднов И. А., Казимиров С. П. Исследование чувствительности метода анализа иерархий Т. Саати // Интеллектуальные технологии на транспорте. 2025. № 4 (44). С. 54–62. DOI: 10.20295/2413-2527-2025-444-54-62

Аннотация. *Средствами MATLAB исследуется чувствительность четырех приближенных оценок Саати для вектора приоритетов в методе анализа иерархий. Идея метода заключается в иерархическом представлении проблемы с последующим парным сравнением объектов и вычислением вектора их приоритетов на каждом уровне иерархии. Ошибки экспертов при парном сравнении объектов моделируются добавлением случайных величин к элементам согласованной матрицы Саати.* ***Цель:*** *исследование чувствительности метода анализа иерархий путем вычисления коэффициентов линейной свертки четырех оценок Саати для вектора приоритетов. Линейная комбинация этих оценок приравнивается к точному вектору приоритетов, и решается серия СЛАУ размерности* $n \times 4$ $(n = \overline{3,11})$ *для весовых коэффициентов методом псевдообратной матрицы с регуляризацией Тихонова.* ***Результаты:*** *статистически установлено, что первые две оценки Саати для вектора приоритетов несущественны, поскольку их весовые коэффициенты практически равны нулю, в то время как весовые коэффициенты третьей и четвертой оценок стабильны и отличны от нуля.* ***Практическая значимость:*** *заключается в использовании полученных результатов в оригинальном программном продукте для оценки альтернатив при принятии решений без привлечения коммерческой среды инженерных расчетов MATLAB.*

Ключевые слова: *метод анализа иерархий, положительная обратно симметричная матрица, оценки Саати для вектора приоритетов, возмущение матрицы парных сравнений, линейная свертка оценок, псевдообратная матрица, регуляризация Тихонова*

2.3.5 *— математическое и программное обеспечение вычислительных систем, комплексов и компьютерных сетей (технические науки);* ***1.2.2*** *— математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)*

Введение

В последние годы наблюдается устойчивый тренд на развитие искусственного интеллекта, включая рекомендательные системы и смежные технологии, которые обеспечивают высокое качество принятия решений. Теория принятия решений (ТПР) зародилась в трудах античных философов [1, 2]. Практическую рациональность анализировал еще Аристотель, методы выбора в условиях неопределенности разрабатывали сто́ики. Но основу ТПР как научной дисциплины заложили Бернулли и Лаплас, разработав теорию вероятностей и концепцию ожидаемой полезности.

Прорыв в ТПР произошел после формализации теории игр и аксиоматизации рационального выбора в 1944 году фон Нейманом и Моргенштерном. Позже развился статистический подход к принятию решений, а также были разработаны критерии выбора в условиях неопределенности. Впоследствии были разработаны динамическое программирование, теория полезности и методы анализа решений. В 1960-е годы ТПР получила активное применение в военном деле, экономике, управлении и транспортной логистике.

Однако к 1970-м годам стало очевидно, что рациональные модели не соответствуют реальному поведению людей. Работы по когнитивным искажениям и теории перспектив дали начало поведенческому направлению, изучающему реальные процессы принятия решений людьми. Появились такие математические методы, как стохастическая оптимизация, нечеткая логика и т. д. [1–3].

В 1970-х годах Томас Саати предложил метод анализа иерархий (МАИ), реализующий системный подход к принятию решений в условиях многокритериального выбора. Основополагающий принцип метода заключается в представлении проблемы в виде иерархической структуры, на вершине которой находится цель принятия решения, ниже — критерии, а в основании — альтернативные варианты решения проблемы (рис. 1) [4]. В общем случае число уровней иерархии не ограничено. Такой подход позволяет решать весьма сложные задачи, разбивая их на простые элементы и выделяя логические связи между ними.

После иерархического представления проблемы находятся приоритеты критериев и частные приоритеты альтернатив по каждому критерию в отдельности. Например, если найден вектор приоритетов критериев $\boldsymbol{X} = \{X_i\}$ $(i = \overline{1,4})$ и по каждому i-му критерию определены частные векторы приоритетов альтернатив $\boldsymbol{Y}^{(i)} = \left\{Y_k^{(i)}\right\}$ $\left(k = \overline{1,3}\right)$ (рис. 1), тогда глобальные приоритеты альтернатив находятся по формуле свертки $Z_k = \sum_{i=1}^{4} Y_k^{(i)} X_i$. На основании этих значений строится *диаграмма предпочтений* альтернатив, например вида $A_2 \succ A_3 \succ A_1$, откуда следует, что Альтернатива 2 является наиболее подходящей для достижения цели.

Основой МАИ является *экспертное* построение матрицы парных сравнений объектов на каждом уровне иерархии проблемы с дальнейшей оценкой вектора их приоритетов. Т. Саати предложил помимо математически точного вычисления вектора приоритетов четыре его приближенные алгебраические оценки. В статье исследуется чувстви-

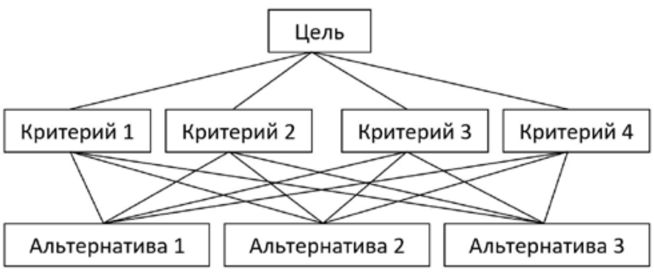

Рис. 1. Трехуровневая иерархическая структура проблемы с четырьмя критериями и тремя альтернативами

тельность этих оценок методами статистического анализа, поскольку ошибки экспертов при парных сравнениях объектов на разных уровнях иерархии моделируются добавлением случайных величин к элементам согласованной матрицы Саати.

Обратно симметричные матрицы парных сравнений

Ключевым этапом метода анализа иерархий Саати является процесс парного сравнения объектов (например, критериев или альтернатив) по оригинальной шкале их относительной важности: 1 — оба одинаково важны, 3 — умеренное превосходство одного над другим, 5 — существенное превосходство одного над другим, 7 — значительное превосходство одного над другим, 9 — абсолютное превосходство одного над другим и 2, 4, 6, 8 — промежуточные значения [4–7].

На основе парных сравнений формируется положительная обратно симметричная матрица с рациональными элементами, которые подчиняются правилу: $a_{ji} = 1/a_{ij}$ для $i, j = \overline{1, n}$, где n — число объектов на данном уровне иерархии.

При непротиворечивых экспертных оценках матрица парных сравнений получается *согласованной*, а именно: если $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_i\}$ ($i = \overline{1, n}$) — вектор точных измерений, тогда матрица Саати имеет вид [4]:

$$\boldsymbol{A} = \left\{ a_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j} \right\}, \left(i, j = \overline{1, n} \right).$$

Для случая $n = 2$ матрица парных сравнений всегда согласованная. В общем случае такое требование невыполнимо потому, что измерения физических величин не являются математически точными, а тем более человеческие суждения о соотношении объектов различной природы.

Оценкой качества парных сравнений объектов в матрице Саати служит *индекс согласованности*, который вычисляется по формуле:

$$\text{ИС}_n = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1},$$

где $\lambda_{\max}$ — наибольшее (главное) собственное число матрицы.

Далее ищется *нормализованный* к единице главный собственный вектор, отвечающий главному собственному числу, поскольку именно он является вектором приоритетов (относительных весов) объектов на данном уровне иерархии. Напомним, что нормализация вектора к единице состоит в делении каждого его элемента на сумму всех элементов, в результате сумма элементов нормализованного вектора равна единице. Легко убедиться, что для согласованной матрицы Саати справедливо соотношение

$$\boldsymbol{A\omega} = n\boldsymbol{\omega},$$

которое является определением собственного числа и собственного вектора квадратной матрицы. Поэтому для согласованной матрицы $\lambda_{\max} = n$ и $\text{ИС}_n = 0$. Остальные собственные числа равны нулю. Отметим, что для несогласованной матрицы Саати всегда $\lambda_{\max} > n$.

В Национальной лаборатории Окриджа, а затем в школе Уортона были сгенерированы средние *случайные индексы* (СИ_n) для случайных матриц Саати размерности от 3 до 15 (табл. 1). Мы будем исследовать матрицы размерности от 3 до 11 как наиболее рекомендуемые для практического применения [4–7].

После этого вычисляется величина *относительной согласованности* суждений экспертов по формуле:

$$\text{ОС}_n = \frac{\text{ИС}_n}{\text{СИ}_n} 100\,\%.$$

Если индекс $\text{ОС}_n \le 10$ %, тогда полученный результат по оценке приоритетов достоверен [4–7].

Таблица 1

Значения случайных индексов согласованности для матриц Саати

Размерность матрицы n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
СИ_n	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,48	1,56	1,57	1,59

Если индекс $ОС_n$ > 10 %, тогда участникам исследования необходимо более подробно проанализировать проблему, проверить свои суждения, уточнить статистические данные или провести новые эксперименты.

Для определения диаграммы предпочтений альтернатив путем применения МАИ требуется для каждого уровня иерархии вычислить вектор приоритетов объектов. Для этого Саати предложил четыре его приближенные алгебраические оценки:

1. Суммировать элементы матрицы по строкам и нормализовать полученный вектор-столбец.
2. Суммировать элементы матрицы по столбцам и вычислить обратные значения этих сумм. Нормализовать полученный вектор-строку и транспонировать.
3. Суммировать элементы матрицы по столбцам и разделить элементы каждого столбца на соответствующую сумму. Найти средние арифметические значения всех строк и нормализовать полученный вектор-столбец.
4. Найти средние геометрические значения всех строк и нормализовать полученный вектор-столбец.

Легко убедиться, что для согласованной матрицы Саати все четыре оценки вектора приоритетов совпадают с его точным значением — нормализованным к единице вектором точных значений.

Методика исследования

Ошибки экспертов при парных сравнениях объектов будем моделировать добавлением случайных величин к элементам согласованной матрицы Саати.

Пусть для $\tilde{\boldsymbol{A}}$ — искаженной матрицы парных сравнений, $\boldsymbol{z}^{(1)}, \boldsymbol{z}^{(2)}, \boldsymbol{z}^{(3)}, \boldsymbol{z}^{(4)}$ — оценки Саати для вектора приоритетов, найденные соответствующими четырьмя методами, описанными выше, а $\boldsymbol{z}^*$ — точный вектор приоритетов, то есть нормализованный главный собственный вектор, вычисленный средствами MATLAB.

Рассмотрим линейную комбинацию этих оценок с произвольными коэффициентами α_i $(i = \overline{1,4})$, которые будем искать из условия равенства этой свертки точному вектору приоритетов

$$\alpha_1 \boldsymbol{z}^{(1)} + \alpha_2 \boldsymbol{z}^{(2)} + \alpha_3 \boldsymbol{z}^{(3)} + \alpha_4 \boldsymbol{z}^{(4)} = \boldsymbol{z}^*.$$

В результате для нахождения вектора весовых коэффициентов $\boldsymbol{\alpha}$ необходимо решить СЛАУ размерности $n \times 4$ вида

$$\boldsymbol{Z\alpha} = \boldsymbol{z}^*, \quad (1)$$

где матрица Z составлена из вектор-столбцов оценок Саати для вектора приоритетов. При этом СЛАУ (1) является: для $n = 3$ — недоопределенной, для $n = 4$ — квадратной и для $n > 4$ — переопределенной, поэтому классические методы линейной алгебры неприменимы для ее решения, кроме случая $n = 4$ с невырожденной матрицей [8–10].

Воспользуемся аппаратом псевдообратной матрицы Мура — Пенроуза, то есть будем искать решение в виде

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{Z}^+ \boldsymbol{z}^*, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{Z}^+$ — псевдообратная матрица к $\boldsymbol{Z}$ размерности $4 \times n$. Она всегда существует, причем единственная [11, 12].

Псевдообратная матрица обобщает понятие обратной матрицы, позволяя найти решение с минимальной евклидовой нормой для любых СЛАУ [8, 10]. В случае, когда классического решения нет, псевдообратная матрица дает наилучшее приближение по методу наименьших квадратов [11, 12]. Она определяется двумя способами:

$$\left[\begin{array}{l} \boldsymbol{Z}^+ = \left(\boldsymbol{Z}^T \boldsymbol{Z}\right)^{-1} \boldsymbol{Z}^T, \\ \boldsymbol{Z}^+ = \lim\limits_{\lambda \to +0} \left[\left(\boldsymbol{Z}^T \boldsymbol{Z} + \lambda \boldsymbol{E}\right)^{-1} \boldsymbol{Z}^T\right], \end{array}\right.$$

где λ — параметр регуляризации Тихонова,
$\boldsymbol{E}$ — единичная матрица 4×4.

А. Н. Тихонов доказал, что если матрица $\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Z}$ (4×4) вырожденная, тогда псевдообратная матрица находится предельным переходом по параметру регуляризации [12]. Идея метода заключается в добавлении малого регуляризирующего члена в методе наименьших квадратов для СЛАУ (1). А именно: вместо минимизации невязки $\| \boldsymbol{Z\alpha} - \boldsymbol{z}^* \|^2$ находится минимум скалярной функции векторного аргумента $f(\boldsymbol{\alpha}) = \| \boldsymbol{Z\alpha} - \boldsymbol{z}^* \|^2 + \lambda \| \boldsymbol{\alpha} \|^2$, где $\| * \|$ — евклидова норма в соответствующих пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^4$ [11, 12].

Исследование чувствительности оценок Саати для вектора приоритетов проводилось в среде инженерных расчетов MATLAB, идеально подходящей для решения задач в векторно-матричной форме.

Алгоритм нахождения коэффициентов линейной комбинации α_i $(i=\overline{1,4})$ состоит из следующих шагов:

1. Генерация согласованной положительной обратно симметричной матрицы Саати заданной размерности для случайного вектора $\boldsymbol{\omega}$.

2. Аддитивное наложение шума на сгенерированную матрицу Саати (детали — в замечании ниже).

3. Вычисление главного собственного числа искаженной матрицы Саати средствами MATLAB. Проверка условия допустимости $\text{ОС}_n \le 10$ %. Если оно выполняется, тогда продолжаем анализ, иначе возвращаемся к пункту 2.

4. Вычисление точного вектора приоритетов через нахождение и нормализацию главного собственного вектора искаженной матрицы Саати средствами MATLAB.

5. Вычисление четырех оценок Саати для вектора приоритетов.

6. Формирование матрицы $\boldsymbol{Z}$ системы (1) и нахождение псевдообратной к ней средствами MATLAB.

7. Вычисление вектора весовых коэффициентов линейной комбинации $\boldsymbol{\alpha}$ по формуле (2).

8. Повторение шагов 1–7 $N = 10^5$ раз. В результате формируется содержательная статистика для всех четырех искомых коэффициентов $\left\{\alpha_i^{(k)}\right\}, \left(i=\overline{1,4}; k=\overline{1,N}\right)$.

9. Вычисление средних арифметических значений для каждого весового коэффициента, что отвечает наилучшему приближению по методу наименьших квадратов для константы [9]:

$$\alpha_i = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha_i^{(k)} \ ,\left(i=\overline{1,4}\right).$$

Замечание. На шаге 2 случайные значения, сгенерированные MATLAB, добавляются только к элементам верхней треугольной части согласованной матрицы Саати, поскольку нижняя треугольная часть получается обратно симметричным отображением, а диагональ остается единичной. Только в этом случае искаженная матрица $\tilde{A}$ является матрицей парных сравнений Саати. Амплитуда шума выбирается из условия $\delta^{-1} < \mu < \delta$, где δ — число, определяемое пользователем, причем $1 \le \delta \le 0{,}5\,\|\tilde{\boldsymbol{A}}\|$ [8, 10].

Результаты вычислительных экспериментов

В процессе работы были исследованы квадратные матрицы Саати размерности $n=\overline{3{,}11}$, поскольку случай n = 2 тривиальный. Результаты исследования представлены в табл. 2 и на рис. 2–5.

Анализ результатов вычислительных экспериментов показал, что:

1. ОС_n матрицы Саати прямо пропорционален величине амплитуды шума.

2. СЛАУ (2) имеет стабильное решение при всех размерах матрицы парных сравнений от 3 до 11, кроме n = 4, при котором решение нестабильно.

3. Коэффициенты α_1, α_2 увеличиваются по мере увеличения амплитуды шума, тогда как коэффициенты α_3, α_4 — уменьшаются.

4. Значения всех четырех коэффициентов стабилизируются при увеличении размера матрицы для любой амплитуды шума.

5. Первые две оценки Саати для вектора приоритетов несущественны, поскольку их весовые коэффициенты практически равны нулю при $n \neq 4$, в то время как весовые коэффициенты третьей и четвертой оценок $\tilde{\alpha}_3 \approx 0{,}63 \pm 0{,}02$ и $\tilde{\alpha}_4 \approx 0{,}37 \mp 0{,}02$.

Таким образом, для точного вектора приоритетов верна оценка

$$\boldsymbol{z}^* \approx \tilde{\boldsymbol{z}} = \tilde{\alpha}_3 \boldsymbol{z}^{(3)} + \tilde{\alpha}_4 \boldsymbol{z}^{(4)} \ ,$$

поэтому оценка для главного собственного числа любой матрицы Саати A находится по формуле

$$\lambda_{\max} \approx \tilde{\lambda}_{\max} = \frac{\left(\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{z}}, \tilde{\boldsymbol{z}}\right)}{\left(\tilde{\boldsymbol{z}}, \tilde{\boldsymbol{z}}\right)} \ ,$$

где $(*,*)$ обозначает скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$.

Заключение

Проведенное в среде MATLAB исследование демонстрирует существенную зависимость метода анализа иерархий Саати от ошибок экспертов при

Таблица 2

Результаты экспериментов по оценке коэффициентов α

n		3	4	5	6	7	8	9	10	11
δ	α_i									
1,1	α_1	0,0427	–0,0251	0,0079	0,0063	0,0045	0,0039	0,0038	0,0030	0,0035
	α_2	0,0403	–0,0234	0,0064	0,0038	0,0027	0,0022	0,0020	0,0015	0,0017
	α_3	0,4082	1,0589	0,7049	0,6601	0,6417	0,6357	0,6311	0,6354	0,6401
	α_4	0,5088	–0,0104	0,2808	0,3298	0,3511	0,3582	0,3632	0,3601	0,3548
1,5	α_1	0,1131	1,1744	0,0797	0,0663	0,0578	0,0551	0,0507	0,0470	0,0454
	α_2	0,1018	1,0955	0,0547	0,0389	0,0331	0,0294	0,0251	0,0224	0,0210
	α_3	0,2943	0,1244	0,6485	0,6180	0,6217	0,6180	0,6264	0,6266	0,6296
	α_4	0,4908	–1,3943	0,2172	0,2770	0,2878	0,2980	0,2983	0,3047	0,3047
2	α_1	0,1440	1,5574	0,1660	0,1403	0,1270	0,1192	0,1138	0,1098	0,1047
	α_2	0,1297	0,7754	0,1134	0,0813	0,0662	0,0600	0,0532	0,0510	0,0469
	α_3	0,2617	0,2664	0,5996	0,5956	0,5956	0,6040	0,6118	0,6190	0,6258
	α_4	0,4647	–1,5992	0,1214	0,1835	0,2122	0,2181	0,2227	0,2219	0,2244

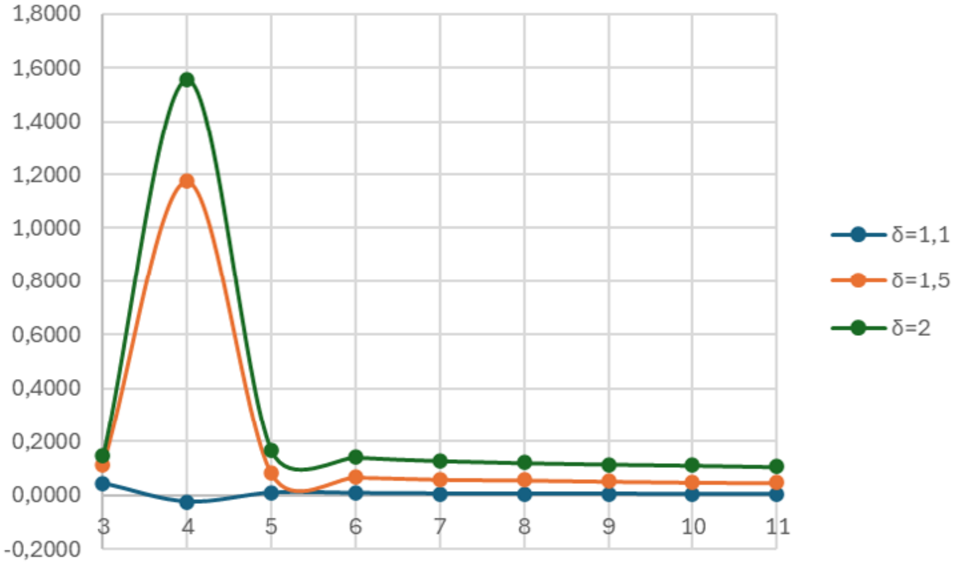

Рис. 2. Значения α_1 при разных коэффициентах шума

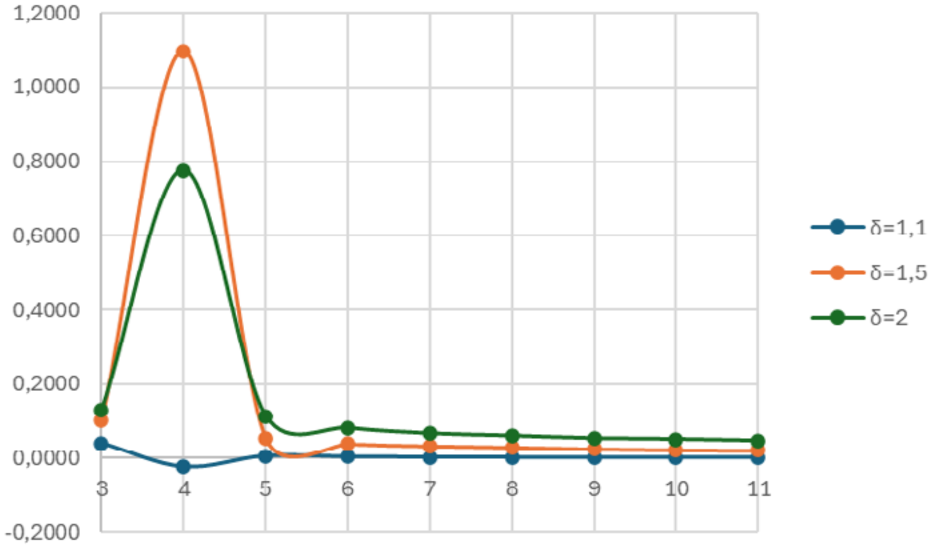

Рис. 3. Значения α_2 при разных коэффициентах шума

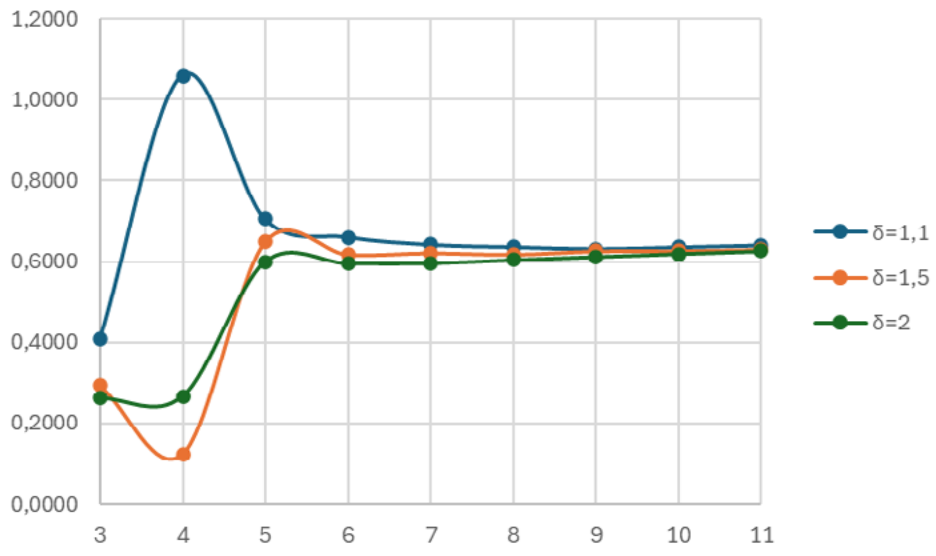

Рис. 4. Значения α_3 при разных коэффициентах шума

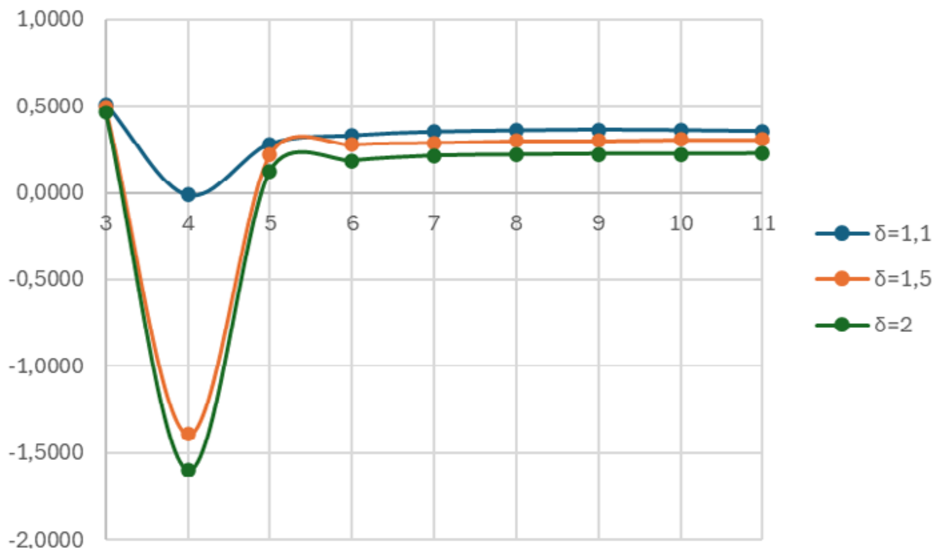

Рис. 5. Значения α_4 при разных коэффициентах шума

формировании матрицы парных сравнений объектов на текущем уровне иерархии проблемы. По предложенной методике в результате численного анализа установлены статистически достоверные закономерности: первые две оценки Саати для вектора приоритетов несущественны, поскольку их весовые коэффициенты практически равны нулю при $n \neq 4$, в то время как весовые коэффициенты третьей и четвертой оценок близки к значениям $0{,}63 \pm 0{,}02$ и $0{,}37 \pm 0{,}02$ соответственно. Полученные результаты могут быть использованы в оригинальном программном продукте для оценки альтернатив при принятии решений без привлечения коммерческой среды инженерных расчетов MATLAB.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Литвак Б. Г. Экспертные оценки и принятие решений. М.: Патент, 1996. 271 с.
2. Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах. М.: Логос, 2000. 296 с.

3. Орлов А. И. Организационно-экономическое моделирование: учебник: в 3 ч. Ч. 2. Экспертные оценки. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. 486 с.

4. Саати Т. Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий / пер. с англ. Р. Г. Вачнадзе. М.: Радио и связь, 1993. 315 с.

5. Forman E. H., Gass S. I. The Analytic Hierarchy Process — An Exposition // Operations Research. 2001. Vol. 49, Iss. 4. Pp. 469–486. DOI: 10.1287/opre.49.4.469.11231.

6. Bodin L., Gass S. I. On Teaching the Analytic Hierarchy Process // Computers and Operations Research. 2003. Vol. 30, Iss. 10. Pp. 1487–1497. DOI: 10.1016/S0305-0548(02)00188-0.

7. Ishizaka A., Labib A. Analytic Hierarchy Process and Expert Choice: Benefits and Limitations // OR Insight. 2009. Vol. 22, Iss. 4. Pp. 201–220. DOI: 10.1057/ori.2009.10.

8. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ / пер. с англ. под ред. Х. Д. Икрамова. М.: Мир, 1989. 655 с.

9. Бригаднов И. А. Методы вычислительной математики. СПб.: Изд-во СЗТУ, 2001. 83 с.

10. Андрушевский Н. М. Анализ устойчивости решений систем линейных алгебраических уравнений: методическое пособие специального вычислительного практикума. М.: Изд. отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова: МАКС Пресс, 2008. 76 с.

11. Тихонов А. Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // Доклады Академии наук СССР. 1965. Т. 163, № 3. С. 591–594.

12. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. 2-е изд. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 285 с.

Дата поступления: 01.11.2025
Решение о публикации: 02.11.2025

A Sensitivity Study of T. Saaty's Analytic Hierarchy Process

Igor A. Brigadnov[1] — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Full Professor of the "Information and Computing Systems" Department. Research interests: decision theory, mathematical modelling, numerical analysis. E-mail: brigadnov@mail.ru

Samuil P. Kazimirov[2] — 1st year Master's Degree Student in 09.04.01 Informatics and Computer Engineering. Research interests: mathematical modelling, programming, numerical analysis.
E-mail: samuil.kazimirov@gmail.com

[1]Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, 9, Moskovsky ave., Saint Petersburg, 190031, Russia
[2]Empress Catherine II Saint Petersburg Mining University, 2, 21st Line, Vasilievsky Island, Saint Petersburg, 199106, Russia

For citation: Brigadnov I. A., Kazimirov S. P. A Sensitivity Study of T. Saaty's Analytic Hierarchy Process. *Intellectual Technologies on Transport*, 2025, No. 4 (44), Pp. 54–62. DOI: 10.20295/2413-2527-2025-444-54-62. (In Russian)

Abstract. *The sensitivity of four approximate Saaty estimates for a priority vector in the Analytic Hierarchy Process (AHP) was studied using MATLAB tools. This method involves structuring the problem hierarchically, conducting pairwise comparisons of elements, and calculating the priority vector at each level of hierarchy. To model expert errors in these pairwise comparisons, random variables were introduced into the elements of the consistent Saaty matrix.* ***Purpose:*** *to study the sensitivity of the AHP by calculating coefficients for the linear convolutions of the four Saaty estimates for the priority vector. A linear combination of these estimates* *was equated to the precise priority vector, and a series of SLAEs n×4 (n = $\overline{3,11}$) for the weight coefficients is resolved using the pseudoinverse matrix method along with Tikhonov regularization.* ***Results:*** *it has been statistically established that the initial two Saaty estimates for the priority vector were insignificant, as their weight coefficients were not substantial and nearly reached zero. In contrast, the weight coefficients of the third and fourth estimates were stable and greater than zero.* ***Practical significance:*** *the results obtained can be applied in a proprietary software product for evaluating alternatives in decision-making without involving the MATLAB commercial engineering calculation environment.*

Keywords: *analytic hierarchy process, positive inverse-symmetric matrix, Saaty estimates for the priority vector, perturbation of the pairwise comparison matrix, linear convolution of estimates, pseudoinverse matrix, Tikhonov regularization*

REFERENCES

1. Litvak B. G. Ekspertnye otsenki i prinyatie resheniy [Expert Assessments and Decision Making]. Moscow, Patent Publishing House, 1996, 271 p. (In Russian)

2. Larichev O. I. Teoriya i metody prinyatiya resheniy, a takzhe Khronika sobytiy v Volshebnykh Stranakh [Theory and Methods of Decision Making, as well as a Chronicle of Events in Magic Lands]. Moscow, Logos Publishing House, 2000. 296 p. (In Russian)

3. Orlov A. I. Organizatsionno-ekonomicheskoe modelirovanie: uchebnik. Ch. 2. Ekspertnye otsenki [Organizational and Economic Modeling: a textbook in 3 parts. Part 2. Expert Assessments]. Moscow, Bauman Moscow State Technical University, 2011. 486 p. (In Russian)

4. Saaty T. L. Prinyatie resheniy. Metod analiza ierarkhiy [Decision Making. The Analytic Hierarchy Process]. Moscow, Radio i Svyaz Publishing House, 1993, 315 p. (In Russian)

5. Forman E. H., Gass S. I. The Analytic Hierarchy Process — An Exposition, Operations Research, 2001, Vol. 49, Iss. 4, Pp. 469–486. DOI: 10.1287/opre.49.4.469.11231.

6. Bodin L., Gass S. I. On Teaching the Analytic Hierarchy Process, Computers and Operations Research, 2003, Vol. 30, Iss. 10, Pp. 1487–1497. DOI: 10.1016/S0305-0548(02)00188-0.

7. Ishizaka A., Labib A. Analytic Hierarchy Process and Expert Choice: Benefits and Limitations, OR Insight, 2009, Vol. 22, Iss. 4, Pp. 201–220. DOI: 10.1057/ori.2009.10.

8. Horn R., Johnson C. Matrichnyy analiz [Matrix Analysis]. Moscow, Mir Publishers, 1989, 655 p. (in Russian)

9. Brigadnov I. A. Metody vychislitelnoy matematiki [Methods of Computational Mathematics]. Saint Petersburg, North-Western State Correspondence Technical University, 2001, 83 p. (In Russian)

10. Andrushevskiy N. M. Analiz ustoychivosti resheniy sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy: metodicheskoe posobie spetsialnogo vychislitelnogo praktikuma [Stability Analysis of Solutions to Systems of Linear Algebraic Equations: A Methodological Handbook for a Special Computational Practical Course]. Moscow, Lomonosov Moscow State University, MAKS Press Publishing House, 2008, 76 p. (In Russian)

11. Tikhonov A. N. O nekorrektnykh zadachakh lineynoy algebry i ustoychivom metode ikh resheniya [On Incorrect Problems of Linear Algebra and a Stable Method for Their Solution], Doklady Akademii nauk SSSR [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1965, Vol. 163, No. 3, Pp. 591–594. (In Russian)

12. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka Publishing House, 1979, 285 p. (In Russian)

Received: 01.11.2025
Accepted: 02.11.2025