Моделирование процессов на основе последовательного гиперфрактального распределения

Смагин В. А.
Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского
Санкт-Петербург, Россия
va smagin@mail.ru

Бубнов В. П.
Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I
Санкт-Петербург, РФ
bubnov1950@yandex.ru

Аннотация. **Фракталы, теория фракталов применяются при описании различных явлений от биологических до квантовомеханических. Предложена математическая модель представления процессов в виде последовательного гиперфрактального распределения. Она базируется на модели квантования информации и гипердельтном распределении вероятностей, ранее предложенном автором. Для формирования последовательности предложено нелинейное интегральное уравнение с целочисленным ядром. По нему находятся базовый фрактал и субфракталы (кластеры). Рассмотрен пример для равномерного распределения. Оценены вероятностные и энтропийные свойства компонентов разложения. Рекомендовано использовать подход в метрологии, теории информации и теории эффективности.**

Ключевые слова: **последовательности фракталов, субфрактал, вероятностные свойства, энтропийные свойства, детерминированные и случайные процессы.**

Введение

В книге известного норвежского физика дается ясное и простое изложение математических свойств фракталов и описываются приложения теории фракталов в гидродинамике, океанологии, гидрологии, в исследовании перколяционных процессов и пр. [1]. Кроме того, приводятся методы компьютерной графики.

Указанный источник рекомендуется для аспирантов и студентов, желающих ознакомиться с теорией фракталов и применять ее при описании различных явлений – от биологических до квантовомеханических.

Фрактал (от лат. fractus – дроблёный, сломанный, разбитый) – это множество, обладающее свойством самоподобия (объект, в точности или приближённо совпадающий с частью самого себя, т. е. целое имеет ту же форму). Создание теории фракталов и методов её применения принадлежит известному учёному – автору большого цикла работ Б. Мандельброту [2].

Целью данной статьи является попытка предложить один из возможных математических методов моделирования детерминированных и случайных процессов, идея которого восходит как к работе автора [3], так и к идее применения фракталов, изложенной в [1, 2]. Она состоит в том, чтобы разработать приближённый метод исследования детерминированных и случайных процессов, с которыми тесно связаны прикладные методы современной науки технического и информационного профиля. В более простом понимании – связать науку о фракталах с теорией вероятностей и теорией информации. При этом автор не претендует на создание научной теории, а излагает своё понимание на простых прикладных примерах.

Суть метода

В статье [3], посвящённой разработке одной из моделей исследования немарковских процессов в теории надёжности и массовом обслуживании, была предложена Марковская модель гипердельтного распределения (см. также [4]). Она основана на методе равенства начальных моментов теоретического и аппроксимирующего распределений теории вероятностей. Здесь эту идею предлагается применить к построению приближённого последовательного распределения, построенного на выделении базового, основного фрактала и совокупности субфракталов более низкого ранга по сравнению с базовым фракталом. Затем на основе дельта-функций Дирака строится плотность вероятности фрактального распределения. С её помощью оцениваются вероятностно интересующие исследователя показатели объекта. Кроме того, при необходимости предлагается применять функцию распределения энтропии для дополнительного оценивания качества объекта (см. [5]).

Математическая модель

Основывается на идее оптимального квантования информации [6]. Точнее, она использует запись авторами величины математического ожидания квантованной случайной величины:

$$M(x) = (x+c)\int_0^{\infty}(E(\frac{z}{x})+1)f(z)dz,$$

где c – установленный постоянный пробел между квантами; x – величина кванта; E – наибольшая целая часть числа с недостатком; $f(x)$ – плотность вероятности случайного количества квантуемой информации Z.

Пусть задана плотность вероятности $f(x)$ на полуинтервале $[0, \infty)$, требуется представить её в виде убывающей фрактальной последовательности, составленной базовым, основным фракталом Φ_0 и множеством субфракталов Φ_i, $i = 1, 2, 3, \dots$ Тогда можно принять следующую формулу для производства фрактализации:

$$\int_0^{\infty} E(\frac{z}{x})f(z)dz - 1 = 0\,. \qquad (1)$$

Содержательный смысл (1) состоит в том, что математическое ожидание E не должно превышать единичного значения, но и не быть отрицательным. Нужно принять равенство $x = \Phi_0$ и решить полученное нелинейное уравнение относительно неизвестной величины Φ_0. При этом нужно как можно точнее вычислить эту величину, а затем проверить правильность достаточно строгого решения уравнения (1). Эта численная величина и будет представлять базовый, основной факториал. Можно убедиться, что точное решение уравнения (1) достигается при $\max\Phi_0$ и оно будет единственным.

Следующим шагом будет вычисление значения величины первого субфрактала Φ_1. Этот процесс будет аналогичен предыдущему процессу – вычисления Φ_0. Но нелинейное уравнение необходимо изменить таким образом, чтобы оно приняло форму

$$\int_{\Phi_0}^{\infty} E\left(\frac{z-\Phi_0}{\Phi_1}\right)\frac{f(z)}{\int_{\Phi_0}^{\infty} f(u)du}dz - 1 = 0. \qquad (2)$$

При известном определённом значении Φ_0 уравнение (2) нужно решить относительно Φ_1 с достаточной строгостью и проверить точность полученного решения. Сомножитель с внутренним интегралом в (2) определяет условную вероятность того, что предшествующий интервал базового фрактала был успешно завершён.

Следующий шаг – вычисление значения второго субфрактала Φ_2. Для этого необходимо использовать нелинейное интегральное уравнение

$$\int_{\Phi_0+\Phi_1}^{\infty} E\left(\frac{z-\Phi_0-\Phi_1}{\hat{O}_2}\right)\frac{f(z)}{\int_{\Phi_0+\Phi_1}^{\infty} f(u)du}dz - 1 = 0. \qquad (3)$$

Сомножитель с внутренним интегралом в (3) определяет условную вероятность того, что предшествующий интервал до Φ_2, включающий базовый фрактал и первый субфрактал, был успешно завершён.

После процедуры следует также обеспечить и проверить точность полученного решения. Далее следует вычислить следующие субфракталы по аналогичным, но видоизменённым уравнениям до тех пор, пока величина последнего фрактала не будет пренебрежимо малой.

Автор статьи не нашел метода решения рассматриваемого нелинейного уравнения в замкнутом аналитическом виде, поэтому применил способ непосредственной замены искомой величины таким образом, чтобы высокая точность решения строго соответствовала максимальному значению искомого фрактала или субфрактала.

Пример вычислений для заданного распределения вероятностей

Задано равномерное распределение, его плотность вероятности записывается в виде

$$f(x) = dunif(x,a,b); \quad a = 0; \quad b = 100 \text{ ед.}$$

Для определения значения величины базового фрактала требуется решить уравнение

$$\int_{0}^{\infty} E\left(\frac{z}{\Phi_0}\right) f(z)dz - 1 = 0.$$

В результате решения путём простого подбора определяем $\Phi_0 = 33{,}33$ ед. с точностью $1{,}819\times10^{4}$. Число фракталов равно единице, а интервал временной занятости составит 33,33 ед.

Определяем значение первого субфрактала путём решения уравнения относительно Φ_1:

$$\int_{\Phi_0}^{\infty} E\left(\frac{z-\Phi_0}{\Phi_1}\right)\frac{f(z)}{\int_{\Phi_0}^{\infty} f(u)du}dz - 1 = 0.$$

Значение

$$\int_{\Phi_0}^{\infty} f(u)du = 0{,}667.$$

Величина Φ_1 будет 22,21 ед. с точностью $7{,}2\times10^{4}$. Число субфракталов Φ_1 равно единице, поэтому интервал временной занятости составит 22,21 ед.

Определяем значение второго субфрактала путём решения уравнения относительно Φ_2:

$$\int_{\Phi_0+\Phi_1}^{\infty} E\left(\frac{z-\Phi_0-\Phi_1)}{\Phi_2}\right)\frac{f(z)}{\int_{\Phi_0+\Phi_1}^{\infty} f(u)du}dz - 1 = 0.$$

Значение

$$\int_{\Phi_0+\Phi_1}^{\infty} f(u)du = 0{,}445.$$

Величина Φ_2 будет 8,63 ед. с точностью $5{,}185\times10^{7}$. Число Φ_2 субфракталов равно единице, поэтому временной интервал занятости составит 8,63 ед.

Определяем значение третьего субфрактала путём решения уравнения относительно Φ_3:

$$\int_{\Phi_0+\Phi_1+\Phi_2}^{\infty} E\left(\frac{z-\Phi_0-\Phi_1-\Phi_2)}{\Phi_3}\right)\frac{f(z)}{\int_{\Phi_0+\Phi_1+\Phi_2}^{\infty} f(u)du}dz - 1 = 0.$$

Значение

$$\int_{\Phi_0+\Phi_1}^{\infty} f(u)du = 0{,}338.$$

Величина Φ_3 будет 11,95 ед. с точностью $4{,}889\times10^{5}$. Число Φ_3 субфракталов равно единице, поэтому временной интервал занятости составит 11,95 ед.

На этом ограничимся, считая, что величина четвёртого субфрактала будет близка к нулю.

Анализ результатов

В примере получены следующие значения продолжительности времени занятости фрактала и субфракталов:

$t_0 = 33{,}33$ ед.; $t_1 = 22{,}21$ ед.; $t_2 = 8{,}63$ ед.; $t_3 = 0$ ед.

Обозначим соответствующие вероятности нахождения процесса в периодах времени занятости:

$$P_0(t_0) = 0{,}667;\; P_1(t_1) = 0{,}519;\; P_2(t_2) = 0{,}316;\; P_3(t_3) = 0.$$

На рис. 1 показано изменение вероятности процесса занятости по времени. Каждый отрезок прямой на рис. 1 соответствует вычисленной вероятности на конец отрезка. Так что если мы хотим сгладить контур кривой непрерывной линией вероятности, то должны соединить плавной линией точку 1 на оси ординат с правыми концами всех отрезков, исключая самый нижний отрезок.

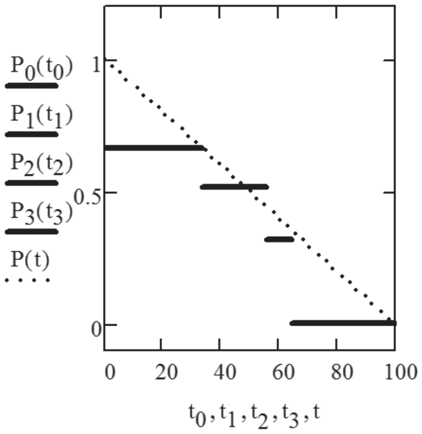

Рис. 1. Вероятности процесса занятости

При достаточном количестве отрезков эта линия должна плавно переходить в нулевую линию – линию абсцисс. На рис. 1 при учёте только двух субфракталов невозможно плавно соединить точки с осью абсцисс, кривую приходится обрывать, не достигая оси.

На рис. 1 прямой пунктирной линией показан график вероятности того, что событие, определяемое заданным равномерным распределением в примере с плотностью вероятности

$$f(t) = dunif(x,a,b),\; a = 0,\; b = 100 \text{ ед.}$$

и определяемое формулой

$$P(t) = 1 - \int_0^t f(z)dz,$$

не может произойти. Эта линия хорошо аппроксимируется концами отрезков вероятностей базового фрактала и второго субфрактала. Это подтверждает корректность фрактальной аппроксимации заданного распределения вероятностей на основе последовательного гиперфрактального распределения.

Оценка эффективности фрактального прогноза по ресурсу Н. М. Седякина

Здесь величина ресурса – это критерий важности, или веса фрактала. Ресурс за время t определяется по формуле

$$r(t) = \int_0^t \lambda(z)dz,\; \lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}.$$

Временные интервалы занятости $t_0 = 0$; $t_1 = 33{,}33$; $t_2 = 55{,}5$; $t_3 = 64{,}2$. Остаточный временной интервал $t > 64{,}2$. Фрактальные (прогнозируемые) ресурсы

$$r_0(t_0) = 0;\; r_1(t_1) = 0{,}334;\; r_2(t_2) = 0{,}555;\; r_3(t_3) = 0{,}642.$$

Суммарный фрактальный ресурс 1,531. Остаточный ресурс $r(t > 64{,}2) = 0{,}358$. Полный ресурс 1,889. Доля фрактальных ресурсов 1,532 / 1,889 = 81,048 %. Доля остаточного ресурса 0,358 / 1,889 = 18,952 %. Таким образом, определение базового фрактала и двух субфрактлов для рассмотренного распределения вероятности оценивается 81,048 % – уровнем эффективности. Это, на наш взгляд, хорошая оценка.

Оценим важность фракталов примера по критерию плотности вероятности случайной величины энтропии [5]. Для этого по вычисленным вероятностям для фракталов найдём средние значения энтропии H, её второй начальный момент α и среднеквадратическое отклонение σ. Значения указанных величин приведены в таблице.

Характеристики фракталов

P	**H**	**α**	**σ**
0,667	0,636	0,512	0,328
0,519	0,692	0,481	0,046
0,316	0,624	0,518	0,484
0	0	0,008	0,092

Выполним аппроксимацию плотности энтропии нормальным распределением

$$g(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(x-H)^2}{2\sigma^2}},$$

где C – константа нормирования плотности. На рис. 2 приведены графики трёх плотностей вероятностей для трёх первых строк таблицы.

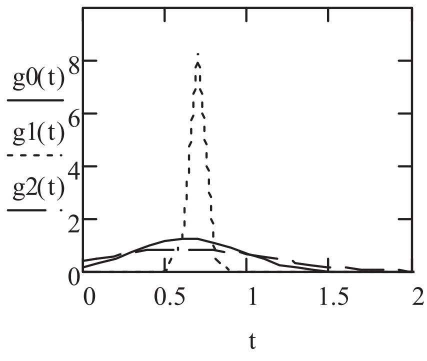

Рис. 2. Плотность вероятностей строк таблицы

Из рис. 2 следует, что первый субфрактал примера имеет самую большую значимость, или вес. Действительно, грубое оценивание значений концентрации величины энтропии (информации) фракталов I по данным таблицы и рис. 2 приводит к следующим результатам: фрактал Ф (первая строка таблицы и нулевой график плотности рис. 2 – I = 5,21; первый субфрактал $Ф_1$ (вторая строка таблицы и первый график плотности рис. 2 – I = 9,031; второй субфрактал Φ_2 (третья строка таблицы и второй график плотности рис. 2 – I = 4,502.

О прикладной направленности исследования

Математическая модель, предложенная в статье, может найти применение в различных прикладных научных исследованиях. Например, гиперфрактальное распределение позволяет представлять современные системы счисления в виде совокупности фракталов, вводить новые системы счисления для моделирования процессов и применять их в изучении проблем теории информации. Фактически оно приложимо к моделированию процессов любой физической природы – материальной или информационной.

Оно позволяет изучать случайные процессы с целью увеличения точности их познания. Является достаточно привлекательным для метрологии [7], теории эффективности [8].

Заключение

Фракталы, теория фракталов в настоящее время применяются при описании различных явлений – от биологических до квантовомеханических [9–14]. На основании знакомства с отдельными трудами этой теории в статье предложена математическая модель предоставления процессов на основе последовательного гиперфрактального распределения. Она опирается на элементы теории квантования информации и на гипердельтное распределение вероятностей, ранее предложенное автором. Для моделирования последовательности фракталов распределений вероятностей предложено нелинейное интегральное уравнение. Ядро этого уравнения представлено в целочисленном виде. В результате последовательного решения уравнения находятся базовый фрактал и производные от него субфракталы (кластеры). Величину и содержание каждого фрактала можно изучать для оценивания его важности, информативности и т. д.

Модель может применяться в метрологии, теории информации, теории эффективности и в решении конкретных прикладных задач детерминированной или случайной направленности. Также на её основе можно получить новые результаты в теории фракталов.

Литература

1. Feder J. Fractals. – NY: Springer, 1988. 254 p.
2. Mandelbrot B. B. Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension. – Paris: Flammarion, 1975. 190 p.
3. Смагин В. А., Филимонихин Г. В. Моделирование случайных процессов на основе гипердельтного распределения // АВТ. 1990. № 5. С. 25-31.
4. Смагин В. А. Коррекция гипердельтного распределения в теории случайных процессов // Интеллектуальные технологии на транспорте. 2015. № 2. С. 27-31.
5. Смагин В. А. Техническая синергетика. Вероятностные модели сложных систем. – СПб., 2004. 171 с.
6. Андронов А. М., Бокоев Т. Н. Оптимальное в смысле заполнение квантование информации // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 3. С. 154-158.
7. Дорохов А. Н. Метрологическое обеспечение эксплуатации вооружения и военной техники: учеб. / под ред. А. Н. Миронова. – СПб., 2009. 755 с.
8. Петухов Г. Б. Основы теории эффективности целенаправленных процессов. Ч. 1. Методология, методы, модели. – СПб., 1989. 660 с.
9. Захаров А. И., Загайнов А. И. Реализация программного комплекса для вычисления фрактальных параметров сложных систем // Интеллектуальные технологии на транспорте. 2015. № 2. С. 47-53.
10. Falconer K. Fractal geometry. – UK: Univ. St. Andrews, 2003. 335 p.
11. Потапов А. А. Фракталы и дробные операторы в обработке информации фундаментальное направление синергетики // Изв. ЮФУ. Технические науки. 2011. № 6. С. 30-40.
12. Li H. Fractal analysis of side channels for breakdown structures in XLPE cable insulation // J. Mater. Sci.: Mater. Electron. Springer Sci. 2013. № 24. P. 1640-1643.
13. Martínez C. A. T., Fuentes C. Chapter 1. Applications of Radial Basis Function Schemes to Fractional Partial Differential Equations // Mathematics Fractal Analysis – Applications in Physics, Engineering and Technology / ed. F. Brambila. 2017.
14. Agboola O., Onyango M. S., Popoola P., Oyewo O. A. Chapter 10. Fractal Geometry and Porosity // Mathematics Fractal Analysis – Applications in Physics, Engineering and Technology / ed. F. Brambila. 2017.

Modelling of processes on the basis of consecutive giperfractal distributions

Smagin V.A.
A. F. Mozhaysky Military Aerospace Academy
St. Petersburg, Russia
va smagin@mail.ru

Bubnov V. P.
Emperor Alexander I St. Petersburg
State Transport University
St. Petersburg, Russia
bubnov1950@yandex.ru

Abstract. **Fractals, the theory of fractals are applied at the description of various phenomena, from biological to quantum mechanical. The mathematical model of representation of processes in the form of consecutive hyper fractal distribution is offered. It is based on model of quantization of information and the giperdeltny distribution of probabilities which is earlier offered by the author. For formation of the sequence the nonlinear integrated equation with an integer kernel is offered. On him there are a basic fractal and subfractals (clusters). An example for uniform distribution is reviewed. Estimation of probabilistic and entropy properties of components of decomposition is made. Use in metrology is recommended, to the theory of information and the theory of efficiency.**

Keywords: **the sequences of fractals, subfraktal, the probabilistic properties, entropy properties determined and casual processes.**

References

1. Feder J. Fractals. NY, Springer, 1988. 254 p.

2. Mandelbrot B. B. Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension. Paris, Flammarion, 1975. 190 p.

3. Smagin V.A., Philimonikhin G.V. Modeling of casual processes on the basis of giperdeltny distribution [Modelirovanie sluchaynykh protsessov na osnove giperdel’tnogo raspredeleniya]. *AVT*, 1990, no. 5, pp. 25-31. (In Rus.)

4. Smagin V.A. Correction of the Hyperdelta Distribution in the Theory of Stochastic Processes [Korrektsiya giperdel'tnogo raspredeleniya v teorii sluchaynykh protsessov]. *Intellectual Technologies on Transport*, 2015, no. 2, pp. 27-31. (In Rus.)

5. Smagin V.A. Technical synergetrics. Probabilistic models of difficult systems [Tekhnicheskaya sinergetika. Veroyatnostnye modeli slozhnykh sistem]. St. Petersburg, 2004. 171 p. (In Rus.)

6. Andronov A. M., Bokoyev T. N. Optimum filling in sense quantization of information [Optimal'noe v smysle zapolnenie kvantovanie informatsii]. *News Academy of Sciences of the USSR. Technical cybernetics*, 1979, no. 3, pp. 154-158. (In Rus.)

7. Dorokhov A. N. Metrological support of operation of arms and military equipment [Metrologicheskoe obespechenie ekspluatatsii vooruzheniya i voennoy tekhnik]: The textbook; ed. A. N. Mironov. St. Petersburg, 2009. 755 p. (In Rus.)

8. Petukhov G. B. Bases of the theory of efficiency of purposeful processes. P. 1. Methodology, methods, models [Osnovy teorii effektivnosti tselenapravlennykh protsessov. Ch.1. Metodologiya, metody, modeli]. St. Petersburg, 1989. 660 p. (In Rus.)

9. Zakharov A. I., Zagaynov A. I. Realization of a program complex for calculation of fractal parameters of difficult systems [Realizatsiya programmnogo kompleksa dlya vychisleniya fraktal'nykh parametrov slozhnykh sistem]. *Intellectual Technologies on Transport*, 2015, no. 2, pp. 47-53. (In Rus.)

10. Falconer K. Fractal geometry. UK: Univ. St. Andrews, 2003. 335 p.

11. Potapov A.A. Fractals and fractional operators in information processing the fundamental direction of synergetrics [Fraktaly i drobnye operatory v obrabotke informatsii fundamental'noe napravlenie sinergetiki]. *News of SFU. Tech. sci.*, 2011, no. 6, pp. 30-40. (In Rus.)

12. Li H. Fractal analysis of side channels for breakdown structures in XLPE cable insulation. *J. Mater. Sci.: Mater. Electron. Springer Sci.*, 2013, no. 24, pp. 1640-1643.

13. Martínez C. A. T., Fuentes C. Chapter 1. Applications of Radial Basis Function Schemes to Fractional Partial Differential Equations. *Mathematics Fractal Analysis – Applications in Physics, Engineering and Technology*; ed. F. Brambila. 2017.

14. Agboola O., Onyango M. S., Popoola P., Oyewo O. A. Chapter 10. Fractal Geometry and Porosity. *Mathematics Fractal Analysis – Applications in Physics, Engineering and Technology*; ed. F. Brambila. 2017.