УДК 539.52

Вариант представления поверхности нагружения и возможные ее формы в условиях двумерной задачи

К. В. Сливец, В. Н. Парамонов

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Россия, 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9

Для цитирования: *Сливец К. В., Парамонов В. Н.* Вариант представления поверхности нагружения и возможные ее формы в условиях двумерной задачи // Известия Петербургского университета путей сообщения. СПб.: ПГУПС, 2026. Т. 23, вып. 3. С. 717–726. DOI: 10.20295/1815-588X-2026-3-717-726

Аннотация

Цель: выявление формы поверхности текучести и анализ ее изменения в зависимости от траектории нагружения. Объектом исследования является базовое понятие теории пластичности — поверхность нагружения материала. Предмет исследования — возможное представление и форма поверхности нагружения в условиях двумерной задачи. **Методы:** описание свойств упругости и пластичности производилось при помощи упрощенной механической модели, представляющей собой фрагмент тонкостенной трубы. Материал трубы обладает свойствами идеально упругопластической среды, что соответствует его работе по диаграмме Прандтля. Рассматривается загружение модели в перемещениях, реализуемое путем задания поворота поперечного торцевого сечения трубы. Рассмотрены различные схемы нагружения, в соответствии с которыми нейтральная ось могла как совпадать декартовыми осями в течение всего процесса нагружения, так и поворачиваться в процессе нагружения. Результирующий угол поворота сечения $\tilde{\varphi}$ можно разложить на компоненты $[\tilde{\varphi}_x, \tilde{\varphi}_y]^T$, операции над которыми аналогичны операциям над компонентами вектора. Таким образом, угол поворота можно рассматривать как вектор, являющийся характеристикой нагружения механической системы и полностью определяющий ее деформированное состояние. Аналогично, если нагружение системы осуществляется посредством результирующего момента $\tilde{M}$ с компонентами $[\tilde{M}_x, \tilde{M}_y]^T$, то в этом случае однозначно определяется ее напряженное состояние. Вместе $\tilde{M}$ и $\tilde{\varphi}$ характеризуют напряженно-деформированное состояние системы. Элементарный объем сплошного тела также можно рассмотреть как механическую систему. Для описания ее напряженно-деформируемого состояния служит соответствующий тензор. Здесь возникает определенное противоречие, так как для упрощенной механической модели характеристикой силового воздействия будет являться вектор, а для элементарного объема — тензор. Вопрос об описании тензора через некоторый вектор может быть решен с использованием представления Ильюшина, по которому девиатору напряжений ставится в соответствие вектор с определенными координатами. В этих координатах также можно изобразить поверхность нагружения и проследить динамику ее изменения. **Результаты:** даже для малого уровня интенсивности пластических деформаций форма и размеры поверхности нагружения сильно зависят от траектории нагружения. Для изотропного тела указанный факт может быть объяснен только трансформацией остаточных напряжений в модели. **Практическая значимость:** предложенный подход позволяет применить упрощенную механическую модель к анализу трансформации поверхностей нагружения (деформирования) для широкого спектра траекторий.

Ключевые слова: пластичность, поверхность нагружения, поверхность деформирования, начальные напряжения

Подход к описанию упругопластических свойств материалов с применением механических моделей разной степени сложности использовали многие авторы [1–4]. Такие модели позволяют получить эффекты, наблюдаемые в реальных материалах, работающих за пределами упругости. Рассмотренная далее упрощенная механическая модель, предложенная впервые Ю. Н. Работновым, с одной стороны, является максимально простой, а с другой — отражает особенности упругопластического поведения сплошных сред.

Упрощенная механическая модель представляет собой систему в виде тонкостенной трубы радиусом R, с толщиной стенки δ, модуль упругости материала трубы E, предел текучести σ_T. В общем случае труба подвержена действию двух моментов — M_x и M_y. Следует отметить, что Ю. Н. Работновым данная модель использовалась для определения границ применимости деформационной теории пластичности.

Также для наглядности будем рассматривать отрезок трубы единичной длины $L = 1$ и выражать ее деформацию от действия момента в угле поворота торцевого сечения φ. Тогда можем записать:

$$\varphi_{\text{т}} = \frac{M \cdot L}{\pi R^3 \delta E}, \qquad (1)$$

Максимальный угол поворота φ_T, соответствующий работе сечения в упругой стадии:

$$\varphi_{\text{т}} = \sigma_{\text{т}} / (ER).$$

И аналогичный момент:

$$M_{\text{т}} = \pi \sigma_{\text{т}} R^2 \delta / L.$$

Далее в зависимостях будем использовать относительные величины $\tilde{M}$ и $\tilde{\varphi}$, равные

$$\tilde{M} = M / M_{\text{т}} \quad \text{и} \quad \tilde{\varphi} = \varphi / \varphi_{\text{т}},$$

где M и φ — результирующие момента и угла поворота соответственно.

Начальное состояние модели отвечает условиям изотропного симметричного тела (среды), которое будет характеризоваться поверхностью текучести, имеющей форму окружности. Ее выражение в параметрической форме:

$$\sqrt{\tilde{M}_x^{\,2} + \tilde{M}_y^{\,2}} = 1.$$

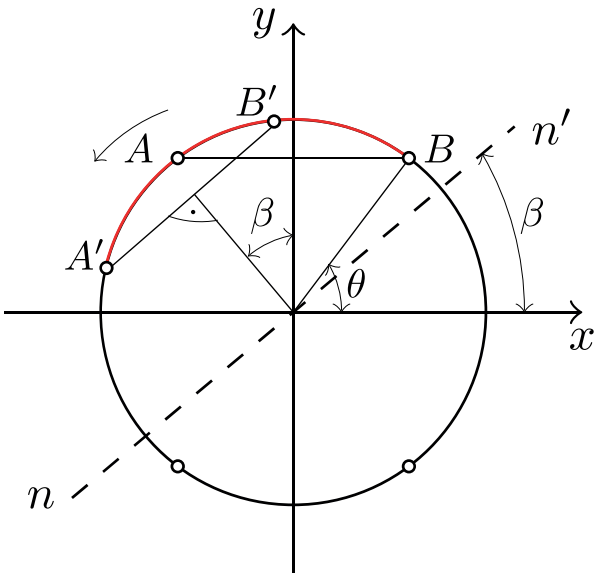


Рис. 1. Схема работы модели за пределом упругости

Хотя для двумерного случая это кривая линия, для сохранения общности терминологии будем использовать название «поверхность». В пространстве деформаций область упругого и пластического деформирования будет разделять поверхность деформирования.

Рассмотрим простое нагружение модели, соответствующее увеличению момента $\tilde{M}_x$ при сохранении $\tilde{M}_y = 0$. От действия этой нагрузки сначала наиболее удаленная точка от оси x, а потом и некоторая часть сечения трубы (дуга AB, рис. 1) переходит в пластическое состояние. Охарактеризуем размеры данной области углом θ. При нагружении он будет расти от 0° и далее асимптотически приближаться к 90°, что будет характеризовать процесс постепенного перехода всего сечения в пластику.

Можно показать, что при простом нагружении с учетом развития пластической зоны зависимость между результирующим моментом и углом поворота имеет вид:

$$\tilde{M} = \frac{2\tilde{\varphi}}{\pi}\left(\sin^{-1}(1/\tilde{\varphi}) + \frac{1}{\tilde{\varphi}}\sqrt{1-\frac{1}{\tilde{\varphi}}}\right), \qquad (2)$$

в котором

$$\tilde{\varphi} = \sqrt{\tilde{\varphi}_x^{\,2} + \tilde{\varphi}_y^{\,2}} > 1 \text{ и } \tilde{M} = \sqrt{\tilde{M}_x^{\,2} + \tilde{M}_y^{\,2}} > 1.$$

График зависимости (2) представлен на рис. 2. Из него вытекает, что рассматриваемая модель описывает упрочняющееся упругопластическое тело (среду), поэтому поверхность текучести, являющаяся границей в пространстве напряжений, отделяющая упругую область от пластической, будет носить название поверхности нагружения [5].

Результирующий угол поворота сечения $\tilde{\varphi}$ можно разложить на компоненты $[\tilde{\varphi}_x, \tilde{\varphi}_y]^T$, операции над которыми аналогичны операциям над компонентами вектора. Таким образом, угол поворота можно рассматривать как вектор, являющийся характеристикой нагружения механической системы и полностью определяющий ее напряженно-деформированное состояние. Требуется решить вопрос о том, что для упрощенной механической модели характеристикой нагружения будет являться вектор, а для элементарного объема — тензор. Для решения данного вопроса воспользуемся представлением А. А. Ильюшина [6], развитым в работах В. Г. Зубчанинова [7]. В соответствии с ним тензору девиатора напряжений соответствует вектор с вычисляемыми координатами:

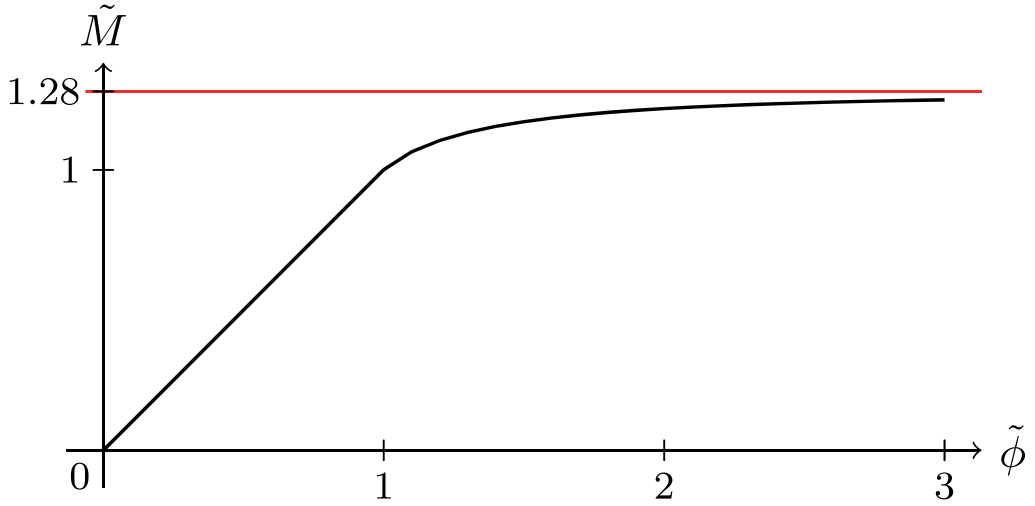


Рис. 2. Зависимость поворота от результирующего момента

$$\overline{S} = \begin{bmatrix} \sqrt{3/2}s_{11} \\ \sqrt{2}\left(s_{22}+s_{11}\right)/2 \\ \sqrt{2}s_{12} \\ \sqrt{2}s_{23} \\ \sqrt{2}s_{31} \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

где s_{ij} — компоненты девиатора напряжений.

Как известно, в механике твердого деформируемого тела существуют два вида плоского напряженно-деформированного состояния: плоское напряженное состояние ($\sigma_3 = 0$ и $\varepsilon_3 \neq 0$) и плоская деформация ($\sigma_3 \neq 0$ и $\varepsilon_3 = 0$). Возможно также использовать понятие двумерного состояния, в котором $\sigma_3 = 0$ и $\varepsilon_3 = 0$. Ему можно найти механические аналоги. Так, если рассмотреть систему из дисков, выполненных из жесткого и прочного материала, взаимодействующих между собой посредством пружин, жесткость которых много меньше, чем у материала дисков, то напряженно-деформированное состояние такой среды может рассматриваться как истинное двумерное, а в целом решение задач в подобной постановке соответствует так называемому методу дискретных элементов [8–9].

Для двумерной среды в представлении А. А. Ильюшина (3) только три компоненты пятимерного вектора будут отличны от нуля:

$$\overline{S} = \begin{bmatrix} \sqrt{3/2}s_{11} \\ \sqrt{2}\left(s_{22}+s_{11}\right)/2 \\ \sqrt{2}s_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что для двумерной задачи всегда $s_{11} = -s_{22}$, либо $-s_{11} = s_{22}$, вторая координата вектора становится равной нулю. Для простоты возможно рассмотреть двумерный вектор со следующими координатами:

$$\overline{S} = \begin{bmatrix} \left(s_{22}-s_{11}\right)/2 \\ s_{12} \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Далее перейдем к безразмерным величинам компонент вектора нагружения. Для этого воспользуемся критерием, который аналогичен критерию Мизеса. Обозначим интенсивность напряжений, при которой наступает пластическая деформация через σ_u, тогда начальная поверхность нагружения будет задаваться уравнением $\sigma_u = (1/2 s_{ij} s_{ij})^{1/2}$, где s_{ij} — компоненты девиатора напряжений. Для компонент девиатора напряжений и вектора нагружения перейдем от тензорного (нумерованного) обозначения осей к их обозначению через декартовы оси. Теперь выразим вектор нагружения в относительных величинах, тогда:

$$\tilde{\overline{S}} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_x \\ \tilde{S}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(s_{yy}-s_{xx}\right)/\sigma_u \\ s_{xy}/\sigma_u \end{bmatrix}, \qquad (5)$$

В нашей задаче величина $\tilde{M}_x$ соответствует $\tilde{S}_x$, а $\tilde{M}_y$ — S_y и, по аналогии с уравнением (1), условие текучести будет уравнением окружности единичного радиуса.

Аналогичные рассуждения можно применить и к деформациям, получив соответствующий вектор:

$$\tilde{\overline{\Theta}} = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_x \\ \tilde{\Theta}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(e_{yy}-e_{xx}\right)/\varepsilon_u \\ e_{xy}/\varepsilon_u \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

где $\tilde{\Theta}_i$ — компоненты вектора;

e_{ij} — компоненты девиатора деформаций;

$\varepsilon_u = (2/3 e_{ij} e_{ij})^{1/2}$ — интенсивность деформаций, соответствующая начальной поверхности деформирования.

Принятые интерпретации (4–6) позволяют выразить траекторию нагружения (в напряжениях или деформациях) для двумерной среды в векторном пространстве. Рассматривая упрощенную механическую систему, можно предположить некоторые соответствия. Так, величину $\tilde{Э}_x$ можно соотнести с $\tilde{\varphi}_x$, а $\tilde{Э}_y$ — с $\tilde{\varphi}_y$. Теперь возможно реализовать векторную траекторию непосредственно на упрощенной механической модели, то есть в конечном итоге промоделировать в ней траекторию из пространства девиатора напряжений (деформаций).

Выполним предварительный анализ основных траекторий нагружения в заявленных координатах на предмет их соответствия основным схемам загружения. Увеличение $\tilde{S}_x$ при $\tilde{S}_y = 0$ будет соответствовать чистому девиаторному нагружению, при котором оси декартовой системы координат образца совпадают с осями главных напряжений. Графически траектория соответствует отрезку Oa (рис. 3). Достижение величиной $\tilde{S}_x$ значений более 1 означает выход системы в пластику, движение в обратном направлении по траектории aO — разгрузку (рис. 3).

Увеличение $\tilde{S}_y$ при $\tilde{S}_x = 0$ в двумерной модели будет соответствовать чистому девиаторному нагружению, при котором оси главных напряжений будут ориентированы под углом 45° к декартовым осям (отрезок Ob). Аналогично движение по bO будет разгрузкой. Согласованное изменение $\tilde{S}_y$ и $\tilde{S}_x$, соответствующее движению по дуге ab или ba, будет означать поворот главных осей до угла 45° при сохранении интенсивности напряжений, достигнутых ранее по оси $\tilde{S}_x$ или $\tilde{S}_y$ соответственно (рис. 3). Можно рассмотреть аналогичные траектории и в пространстве деформаций (рис. 4).

В упрощенной модели рассмотрим простую программу нагружения, которой присвоим номер 1a. Она будет характеризоваться увеличением угла поворота $\tilde{\varphi}_x$. Для двумерной среды в принятых нами координатах векторного представления загружение будет соответствовать увеличению $\tilde{Э}_x$ при сохранении $\tilde{Э}_y = 0$ (отрезок Oa). Далее следует разгрузка в перемещениях до нуля (отрезок aO), то есть возврат сечения в исходное положение. Поскольку загружение было выполнено за пределы упругой области, то следует ожидать изменения очертаний начальной поверхности нагружения.

Для нахождения ее новой формы реализовывался алгоритм, состоящий в следующем. Возврат сечения в исходное положение после нагружения за пределами упругости будет характеризоваться наличием остаточных напряжений, эпюра которых известна. Эпюра —

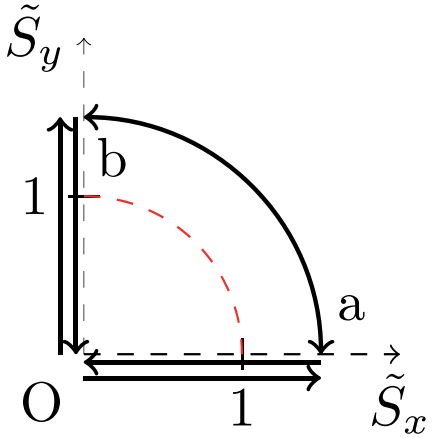


Рис. 3. Основные траектории нагружения

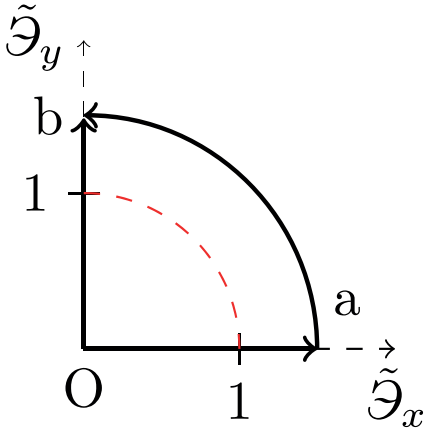


Рис. 4. Основные траектории деформирования

графическое представление распределения напряжений в стенке трубы на ее развертке, то есть на развертке окружности. Как будет показано далее, эпюры остаточных напряжений для каждой траектории существенно отличаются. Однако возможно найти приращения углов, позволяющих разгрузить систему уже под напряжением, то есть найти такое положение сечения, при котором оба момента будут равны нулю. Далее от этой нулевой точки реализовывалась серия веерных нагружений. По каждому из лучей нагружение осуществлялось до того момента, когда одно из волокон сечения переходит в пластику, при этом осуществлялась фиксация соответствующих компонент вектора нагружения. Очевидно, что найденные таким образом компоненты являются координатами точки, которая лежит на поверхности нагружения. Каждое из пробных нагружений осуществлялось малым шагом. Угол между лучами принимался также малым — равным 1°.

Найденная на основе описанного выше алгоритма поверхность нагружения для траектории № 1а представлена на рис. 5.

Видно, что описываемая в векторном представлении Ильюшина поверхность отражает ряд наблюдаемых на практике эффектов, прежде всего эффект Баушингера. Действительно, шлемовидная форма наглядно описывает эффект снижения предела упругости при нагружении в обратном направлении.

Программа № 1б аналогична № 1а, но при пластическом загружении по $\tilde{Э}_y$.

Далее определялись очертания поверхности при сложном нагружении по программе № 2. Задача также решалась в перемещениях. Программа реализовывала следующую схему векторной траектории загружения двумерной среды: от начального изотропного состояния увеличивался $\tilde{Э}_x$ (увеличение $\tilde{\varphi}_x$ в модели) и доводился до уровня 1,5 (отрезок Оа на рис. 4). Затем девиаторным (в перемещениях)

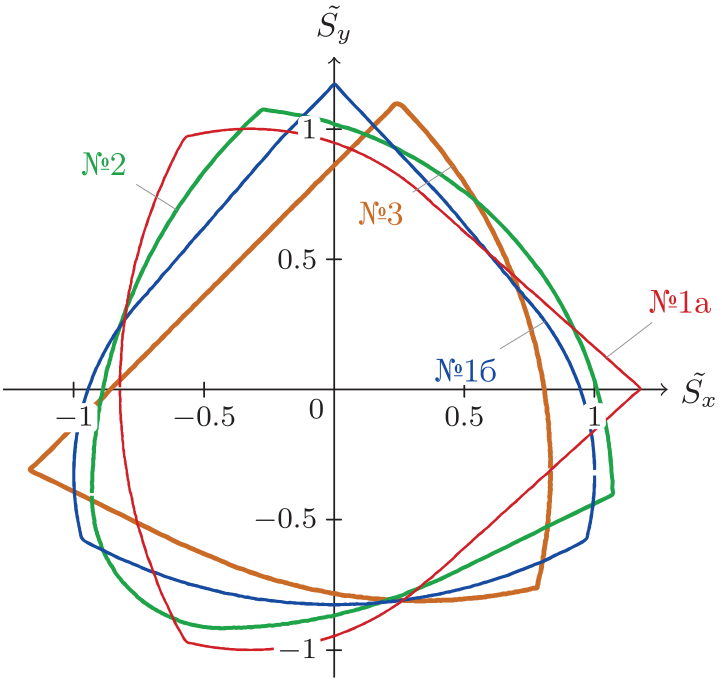


Рис. 5. Очертания поверхностей нагружения после реализации соответствующих программ нагружения

загружением, характеризующимся согласованным уменьшением $\tilde{Э}_x$ и увеличением $\tilde{Э}_y$ (согласованным уменьшением $\tilde{\varphi}_x$ и увеличением $\tilde{\varphi}_y$ в упрощенной модели), система приводилась в конечное положение (дуга ab на рис. 4). Данная траектория создает условия, когда сектор пластической зоны поворачивается вслед за загружением (рис. 1). Следует отметить, что как угол поворота этого сектора β, так и его размер (длина дуги $A'B'$) и положение нейтральной оси n-n' в этом случае, вообще говоря, неизвестны. Полученная для программы № 2 поверхность текучести представлена на рис. 5.

Наконец, программа № 3 состояла в загружении из начального изотропного состояния в следующей последовательности. Нагружение по отрезку Oa рост $\tilde{Э}_x$ (увеличение $\tilde{\varphi}_x$ в модели), затем разгрузка в обратном направлении по aO до $\tilde{Э}_x = 0$ (до $\tilde{\varphi}_x = 0$ в модели). Затем повторное нагружение, но уже в перпендикулярном направлении по Ob рост $\tilde{Э}_y$ (рост $\tilde{\varphi}_y$ в модели) и после — разгрузка $\tilde{Э}_y = 0$ ($\tilde{\varphi}_y = 0$ в модели). Полученная для программы № 3 поверхность текучести представлена на рис. 5.

Из рис. 5 видно, что форма поверхности нагружения для изначально изотропного тела даже при незначительных пластических деформациях меняется значительно, при этом зависит от пути загружения. Используемые для описания такого рода явлений зависимости названы Ю. К. Зарецким голономными [10].

Представленная модель может быть рассмотрена как упрощенное описание механизма пластичности для плоской схемы. В ней трансформация поверхности нагружения в изначально изотропном теле обусловлена прежде всего влиянием остаточных напряжений [11], поскольку иные факторы, связанные с неоднородностью тела, отсутствуют.

Полученные в модели эпюры остаточных напряжений приведены на рис. 6. На нем напряжения отображены в виде развертки круглого сечения. Каждой точке круглого сечения, положение которой задается полярным углом α, на развертке соответствует точка с координатой по оси x — численно равной значению угла α в радианах (в диапазоне $0 \le \alpha \le 2\pi$). Начало отсчета и положительное направление согласованы с углом θ (см. рис. 1). Для всех указанных

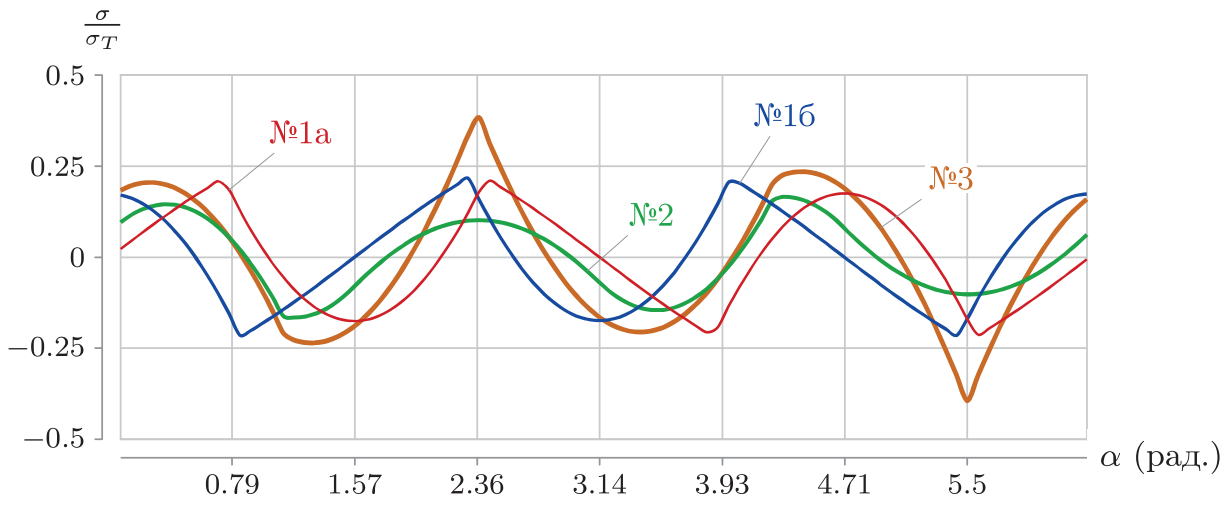


Рис. 6. Эпюры остаточных напряжений по результатам различных программ нагружений

точек приведена относительная величина остаточного напряжения.

Можно сделать вывод, что после реализации конкретной траектории нагружения реальное тело также будет характеризоваться определенным видом распределения остаточных напряжений, которые, в свою очередь, влияют на форму поверхности нагружения.

Для реальных материалов характерна неоднородность прочностных и деформационных свойств, поэтому даже отыскание начальной поверхности нагружения в них является весьма трудоемкой задачей. Как отмечалось в работах [3, 12], граница пластичности существенно зависит от принимаемого допуска на предельную пластическую деформацию. Такие выводы сделаны В. В. Новожиловым [3] на основании обобщения результатов как собственных экспериментальных исследований, так и других авторов.

Предложенный подход позволяет применить упрощенную механическую модель к анализу трансформации поверхностей нагружения (деформирования) для широкого спектра траекторий. Рассматриваемая модель обладает рядом преимуществ: изотропность механических свойств, четкие очертания начальной поверхности нагружения. Учитывая это, а также тот факт, что в ней очевидны механизмы, приводящие к трансформации поверхности нагружения и в целом отвечающие за упругопластическое поведение тела, она может служить инструментом для построения не только математической, но и физической теории пластичности.

Список источников

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

2. Работнов Ю. Н. Модель, иллюстрирующая некоторые свойства упрочняющегося пластического тела // Прикладная математика и механика. 1959. Т. 23, вып. 1. С. 164–168.

3. Новожилов В. В., Кадашевич Ю. И. Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение. Ленингр. отделение, 1990. 223 с.

4. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.

5. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.

6. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. 2-е изд. М.: URSS, 2016. 272 с.

7. Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 356 с.

8. Дидух Б. И. Упругопластическое деформирование грунтов. М.: Изд-во Университета дружбы народов, 1987. 166 с.

9. Бригер И. А. Остаточные напряжения. М.: Машгиз, 1963. 233 с.

10. Cundall P. A., Strack O. D. L. A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies // Geotechnique. 1979. No. 29 (1). Pp. 47–65.

11. Зарецкий Ю. К. Лекции по современной механике грунтов. Ростов н/Д.: Изд-во Ростовского университета, 1989. 608 с.

12. Новожилов В. В. Экспериментальное исследование поверхности текучести при сложных путях деформирования // Вопросы долговременной прочности энергетического оборудования: Труды Центрального котлотурбинного института имени И. И. Ползунова. Л., 1986. Вып. 230. С. 68–73.

Дата поступления: 20.04.2026
Решение о публикации: 26.06.2026

Контактная информация:
СЛИВЕЦ Константин Владимирович — кандидат техн. наук, доцент; soiltech@yandex.ru
ПАРАМОНОВ Владимир Николаевич — доктор техн. наук, профессор; parvn@georec.spb.ru

Possible Representation of the Yield Surface and Its Possible Shapes in a Two-Dimensional Problem

K. V. Slivetz, V. N. Paramonov

Emperor Alexander I Petersburg State Transport University, 9 Moskovsky ave., St. Petersburg, 190031, Russia

For citation: *Slivetz K. V., Paramonov V. N.* Possible Representation of the Yield Surface and Its Possible Shapes in a Two-Dimensional Problem // Proceedings of Petersburg State Transport University, 2026. Vol. 23, iss. 3. Pp. 717–726. DOI: 10.20295/1815-588X-2026-3-717-726 (In Russian)

Abstract

Objective: the identification of the shape of the yield surface and analysis of the change in its shape depending on the loading path. The object of research is the basic concept of the theory of plasticity – the loading surface of the material. The subject is the possible representation and shape of the loading surface in a two-dimensional problem. **Methods:** the article considers a simplified two-dimensional model representing a fragment of a thin-walled pipe. The pipe material is elastic-perfectly plastic material, in accordance with Prandtl diagram. Displacement-Controlled loading for model is assumed. The load is represented by rotation of the pipe cross-section, realized about either a single Cartesian axis or two axes simultaneously. It is shown that load can be considered as a vector. But stress and strain in a point of the body given in term of Tensor Analysis. This issue can be resolved using the Ilyushin representation, according to which a vector is assigned to the deviatoric stress tensor. **Results:** even for a low level of plastic deformation intensity, the shape and size of the loading surface strongly depend on the loading path. For an isotropic body, this fact can only be explained by the transformation of residual stresses in the body. **Practical significance:** the proposed approach allows us to apply a simplified mechanical model to the analysis of the transformation of yield surfaces for a wide range of load paths and compare the results with those obtained for real materials.

Keywords: plasticity, yield surface, deformation surface, residual stresses

References

1. Rabotnov Yu. N. Polzuchest' elementov konstruktsiy [Creep of Structural Elements], Moscow, Nauka, 1966, 752 p. (In Russian)

2. Rabotnov Yu. N. Model', illyustriruyushchaya nekotorye svoystva uprochnyayushchegosya plasticheskogo tela [A Model Illustrating Some Properties of a Strengthening Plastic Body], *Prikladnaya matematika i mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]*, 1959, vol. 23, no. 1, pp. 164–168. (In Russian)

3. Novozhilov V. V., Kadashevich Yu. I. Mikronaprazheniya v konstruktsionnykh materialakh [Microstresses in Structural Materials], Leningrad, Mashinostroenie. Leningradskoe otdelenie [Machine-Building. Leningrad Branch], 1990, 223 p. (In Russian)

4. Ishlinskiy A. Yu., Ivlev D. D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti [Mathematical Theory of Plasticity], Moscow, Fizmatlit [Physics and Mathematics Literature], 2001, 704 p. (In Russian)

5. Kachanov L. M. Osnovy teorii plastichnosti [Fundamentals of the Theory of Plasticity], Moscow, Nauka, 1969, 420 p. (In Russian)

6. Ilyushin A. A. Plastichnost'. Osnovy obshchey matematicheskoy teorii [Plasticity. Fundamentals of the General Mathematical Theory], 2nd ed., Moscow, URSS, 2016, 272 p. (In Russian)

7. Zubchaninov V. G. Mekhanika protsessov plasticheskikh sred [Mechanics of Processes in Plastic Media], Moscow, Fizmatlit [Physics and Mathematics Literature], 2010, 356 p. (In Russian)

8. Didukh B. I. Uprugoplasticheskoe deformirovanie gruntov [Elastoplastic Deformation of Soils], Moscow: Izdatel'stvo Universiteta Druzhby Narodov [Publishing House of Peoples' Friendship University], 1987, 166 p. (In Russian)

9. Briger I. A. Ostatochnye napryazheniya [Residual Stresses], Moscow: Mashgiz [Machine-Building State Publishing House], 1963, 233 p. (In Russian)

10. Cundall P. A., Strack O. D. L. A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies, *Geotechnique*, 1979, no. 29 (1), pp. 47–65.

11. Zaretskiy Yu. K. Lektsii po sovremennoy mekhanike gruntov [Lectures on Modern Soil Mechanics], Rostov-on-Don, Izdatel'stvo Rostovskogo universiteta [Publishing House of Rostov University], 1989, 608 p. (In Russian)

12. Novozhilov V. V. Eksperimental'noe issledovanie poverkhnosti tekuchesti pri slozhnykh putyakh deformirovaniya [Experimental Study of the Yield Surface under Complex Deformation Paths], *Voprosy dolgovremennoy prochnosti energeticheskogo oborudovaniya: Trudy Tsentral'nogo kotloturbinnogo instituta imeni I. I. Polzunova [Issues of Long-Term Strength of Power Equipment: Proceedings of the I. I. Polzunov Central Boiler and Turbine Institute]*, Leningrad, 1986, issue 230, pp. 68–73. (In Russian)

Received: April 20, 2026
Accepted: June 26, 2026

Author's information:
Konstantine V. SLIVETZ — PhD in Engineering, Associate Professor; soiltech@yandex.ru
Vladimir N. PARAMONOV — PhD in Engineering, Professor; parvn@georec.spb.ru