

УДК 533+524.7

Распределение плотности в газовой оболочке планеты

Е. Н. Бодунов, А. О. Семенов

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Российская Федерация, 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9

Для цитирования: Бодунов Е. Н., Семенов А. О. Распределение плотности в газовой оболочке планеты // Известия Петербургского университета путей сообщения. — СПб.: ПГУПС, 2023. — Т. 20. — Вып. 1. — С. 101–109. DOI: 10.20295/1815-588X-2023-1-101-109

Аннотация

Цель: Теоретическое исследование распределения плотности газа вокруг планеты с учетом самогравитации. **Методы:** Предложенные в настоящей работе уравнения для плотности газовой оболочки планеты с соответствующими граничными условиями решаются аналитически и численно методом Рунге — Кутты. **Результаты:** Впервые с помощью метода подобия проведен анализ численного решения уравнений для всего пространства, в котором преобладает гравитационное влияние планеты — в диапазоне расстояний от поверхности планеты до радиуса Хилла. Вблизи планеты решение совпадает с классической барометрической формулой, на промежуточных расстояниях — с барометрической формулой, учитывающей зависимость ускорения свободного падения от расстояния до планеты, на больших расстояниях — с зависимостью плотности для сингулярной изотермической газовой сферы, обусловленной самогравитацией. **Практическая значимость:** На основе полученного решения создана единая картина распределения плотности газовой оболочки планеты. Представленные в работе результаты могут быть полезны как для преподавателей физики вузов, так и для научных сотрудников, занимающихся астрофизикой.

Ключевые слова: Газовая оболочка планеты, самогравитация, барометрическая формула, уравнение Пуассона, плотность газа в газовых скоплениях, радиус Хилла.

Введение

В учебниках по общей физике зависимость давления газа $p(z)$ от высоты $z = r - R_c$ над поверхностью планеты (R_c — радиус планеты, r — расстояние от центра планеты) обычно описывается барометрической формулой, имеющей вид:

$$\frac{p(z)}{p_0} = e^{-z/H_0}, \quad (1)$$

где p_0 — давление на поверхности планеты (при $z = 0$);

H_0 — шкала высот (высота, на которой давление газа в атмосфере уменьшается в e раз) или же высота однородной атмосферы (толщина, которую имела бы атмосфера, если всюду в ней давление было бы такое же, как на поверхности):

$$H_0 = \frac{kT_0}{mg_0} = \frac{kT_0 R_c^2}{GM_c m}. \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) k — постоянная Больцмана, g_0 — ускорение свободного падения, $g_0 = GM_c/R_c^2$ (G — гравитационная постоянная, M_c — масса планеты), T_0 — температура. Формула (1) получена при следующих предположениях: атмосферный газ считается идеальным, состоит из молекул массы m , находится при постоянной температуре $T = T_0$ в гравитационном поле планеты, ускорение свободного падения g не зависит от z и равно ускорению свободного падения g_0 на поверхности планеты (при $z = 0$). При выводе уравнения (1) обычно постулируется, что давление на высоте z обусловлено

весом вышележащего столба газа. С другими методами вывода барометрической формулы, а также с историей вопроса можно ознакомиться в кратком обзоре [1].

Несмотря на свою простоту и сделанные при ее выводе предположения, формула (1) достаточно хорошо передает зависимость давления от высоты в нижних слоях земной атмосферы. Отметим, что так как идеальный газ подчиняется уравнению $p = \rho kT / m$ (ρ — плотность газа, $\rho = nm$, n — концентрация газа), то барометрическая формула (1) описывает также распределение концентрации и плотности газа в изотермической атмосфере, так как $n(z)/n_0 = \rho(z)/\rho_0 = p(z)/p_0$ (n_0 и ρ_0 — концентрация и плотность газа на поверхности планеты).

Если учесть зависимость ускорения свободного падения от высоты z ($g = GM_c/(R_c + z)^2 = GM_c/r^2$), то барометрическая формула приобретает вид [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{p(r)}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n(r)}{n_0} &= \exp\left(-\frac{GM_c m}{kT_0} \left(\frac{1}{R_c} - \frac{1}{r}\right)\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{R_c}{H_0} \left(1 - \frac{R_c}{r}\right)\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (3) является следствием распределения Больцмана, согласно которому в состоянии термодинамического равновесия отношение концентраций газа на разных высотах (R_c и r) в потенциальном поле определяется разностью потенциальных энергий молекул газа $W(R_c) - W(r)$, деленной на kT_0 :

$$\begin{aligned} \frac{n(r)}{n_0} &= \exp\left(\frac{W(R_c)}{kT_0} - \frac{W(r)}{kT_0}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{GM_c m}{kT_0} \frac{1}{R_c} + \frac{GM_c m}{kT_0} \frac{1}{r}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Несмотря на давнюю историю, барометрическая формула продолжает интересовать препо-

давателей физики и научных работников с точки зрения ее использования в учебной работе, обобщения на случай неидеального газа, наличия центробежных сил и так далее [1–7], применения в различных приложениях, начиная с метеорологических [8–11] и заканчивая физикой плазмы [12], ядерной физикой [13, 14] и астрофизикой [15–18].

Недостатком обобщенной барометрической формулы (3), согласно, например, классическому учебнику Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [2], является стремление концентрации газа n при $r \rightarrow \infty$ к постоянной величине, $n(r \rightarrow \infty) = n_0 \exp(-R_c/H_0)$, что некорректно, так как конечное количество газа не может быть распределено по бесконечному объему с отличной от нуля концентрацией. Этот недостаток барометрической формулы (3) можно исправить, если предположить уменьшение температуры газа до нуля с увеличением высоты быстрее, чем $(1 + z/R_c)^{-2}$ [1, 7]. Однако известно, что температура газа на больших высотах в атмосфере отлична от нуля.

Дополнительным фактором, не учтенным в (3) и приводящим к удержанию газа вблизи планеты, является самогравитация [15–18]: газ на расстоянии r удерживается не только притяжением со стороны планеты, но и со стороны слоев газа, расположенных ниже — на расстояниях, меньших r . Как известно [15–18], самогравитация используется в астрофизике для объяснения пространственного строения звезд, галактик и газопылевых структур.

В настоящей работе теоретически исследуется влияние самогравитации на распределения плотности газа вокруг планеты.

Система уравнений, численное решение и обсуждение результатов

В астрофизике самогравитация рассматривается на основе уравнения Пуассона. Это уравнение можно получить следующим образом. Рассмотрим твердое ядро планеты, окруженное

сферически симметричной самогравитирующей оболочкой из идеального изотермического газа, находящегося в гидростатическом равновесии. Условие гидростатического равновесия такой оболочки можно записать в виде системы из двух уравнений [19, 20]:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \rho, \\ \frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \end{cases} \quad (5)$$

где M — масса, заключенная в сфере радиуса r .

Дифференцируя первое уравнение (5) по r и подставляя в него второе уравнение, с учетом уравнения состояния идеального газа ($p = \rho kT / m$) получаем уравнение Пуассона:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -4\pi G \frac{m}{kT} \rho. \quad (6)$$

Это уравнение можно представить также в интегральном виде:

$$\frac{\rho(r)}{\rho_0} = \exp \left(-\frac{GmM_c}{kT_0} \left(\frac{1}{R_c} - \frac{1}{r} \right) - \int_{R_c}^r \frac{Gm}{kT_0} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{x^2} \left(\int_{R_c}^x 4\pi \rho(y) y^2 dy \right) dx \right). \quad (7)$$

В приближении малой массы атмосферы по сравнению с массой планеты (т. е. когда вклад интегрального слагаемого в экспоненте мал) уравнение (7) можно решать итерационным методом. Из уравнения (7), эквивалентного уравнению (6), отчетливо видно, что на малых расстояниях от планеты и при малых плотностях газа ($\rho \rightarrow 0$), когда самогравитацией можно пренебречь (второе слагаемое под знаком экспоненты равно нулю), распределение плотности газа имеет вид барометрической формулы (3). На больших расстояниях, где самогравитация преобладает над притяжением планеты (первым слага-

емым под знаком экспоненты в (7) можно пренебречь), уравнения (6) и (7) имеют аналитическое решение:

$$\rho(r) = \frac{kT_0}{2\pi Gm} \frac{1}{r^2} = \frac{2}{3} \frac{\rho_c}{\rho_0} \frac{H_0 R_c}{r^2}. \quad (8)$$

Введем безразмерную координату x и два безразмерных параметра:

$$x = r / R_c, \quad a = R_c / H_0, \quad b = \rho_0 / \rho_c, \quad (9)$$

где ρ_c — плотность ядра (планеты), $M_c = (4\pi/3) \rho_c R_c^3$. Параметр a — безразмерный радиус планеты, выраженный в единицах H_0 . Параметр b есть отношение плотности газа ρ_0 у поверхности ядра (планеты) к плотности ядра ρ_c (планеты). Используя параметры (9), уравнение (8) преобразуем к виду:

$$\frac{\rho(r)}{\rho_0} = \frac{2}{3} \frac{1}{ab} \frac{1}{x^2}. \quad (10)$$

В общем случае (в том числе и в рассматриваемом в настоящей работе — газовая оболочка, в центре которой находится однородное ядро конечных размеров) уравнение (6) может быть решено только численно.

Проинтегрировав второе уравнение системы (5) от 0 до $r > R_c$, получим:

$$M = M_c + \int_{R_c}^r 4\pi r^2 \rho dr. \quad (11)$$

Для уменьшения количества параметров задачи (с целью изучения свойств решения системы уравнений (5)) используем метод подобия, успешно применяющийся в теории планетных атмосфер (см., например, [21, 22]).

Введем безразмерные функции:

$$u = \rho / \rho_0, \quad f = M / M_c. \quad (12)$$

С помощью безразмерных величин (12) и параметров (9) система уравнений (5) записывается в виде:

Параметры Земли, Юпитера и протояпитера (в скобках указаны единицы измерения)

Планета	Земля	Юпитер	Протояпитер ^{1*}
Плотность планеты ρ_c (кг/м ³)	5500	1326	5500
Плотность газовой оболочки у поверхности планеты ρ_0 (кг/м ³)	1,22	0,16	~200 ^{2*}
Средняя молекулярная масса m (а. е. м)	28,5	2,3	2,3
Температура у поверхности T_0 (К)	288	129	5000
Масса планеты M_c (M_E) ^{3*}	1	318	1–25 ^{4*}
Радиус планеты $R_c = (3M_c/4\pi\rho_c)^{1/3}$ (R_E) ^{5*}	1	11	1–3
Ускорение свободного падения $g_0 = GM_c/R_c^2$ (м/с ²)	9,8	25,9	9,8–28,7
Шкала высот $H_0 = kT_0/mg_0$ (км)	8,6	18	630–1840
$a = R_c/H_0$	744	3886	3,46–29,6
$b = \rho_0/\rho_c$	0,0002	$3 \cdot 10^{-5}$	0,036

Примечания:

^{1*}Под протояпитером понимается твердое ядро будущей планеты на месте современного Юпитера в протопланетном облаке на раннем этапе образования планет Солнечной системы;

^{2*} порядок величины взят из [20];

^{3*} $M_E = 5,97217 \cdot 10^{24}$ кг — масса Земли;

^{4*} массы твердых ядер внутри современных планет — гигантов Солнечной системы оцениваются как 15–25 M_E [23];

^{5*} $R_E = 6371$ км — радиус Земли.

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = -\frac{af}{x^2}u, \\ \frac{df}{dx} = 3bx^2u. \end{cases} \quad (13)$$

Система уравнений (13) решалась численно методом Рунге — Кутты со следующими граничными условиями на поверхности планеты:

$$u(1) = 1 \text{ и } f(1) = 1. \quad (14)$$

Расчеты производились для набора параметров a и b (9), характерных для Земли, Юпитера и протояпитера (таблица).

Результаты численных расчетов приведены на рисунке (синие, зеленые и красные кривые). Пунктирной серой кривой добавлено аналитическое решение уравнений (13) без учета самогравитации (при $f \equiv 1$):

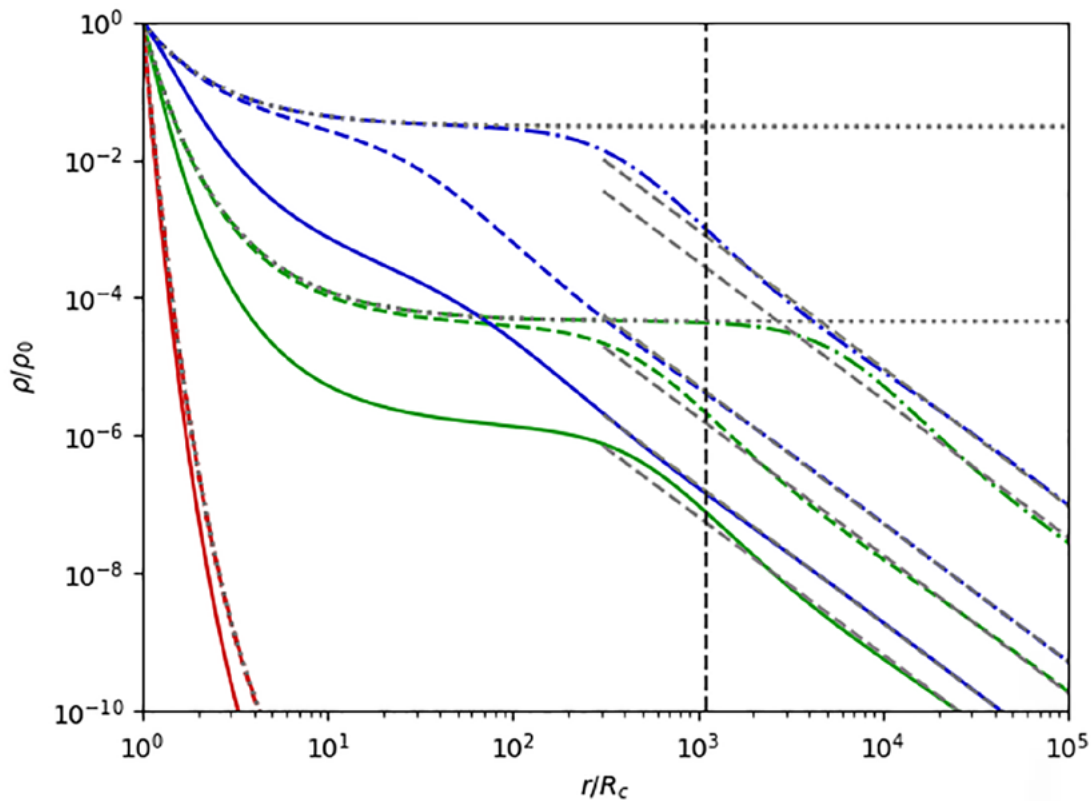
$$\frac{\rho}{\rho_0} = u = \exp\left(-\frac{a(x-1)}{x}\right). \quad (15)$$

Это уравнение есть уравнение (3), записанное через безразмерные параметры. На больших высотах ($x \gg 1$) функция (15) стремится к постоянному (асимптотическому) значению:

$$\rho / \rho_0 = \exp(-a). \quad (16)$$

С учетом самогравитации численные решения отклоняются от асимптотики (16) (степень отклонения зависит от параметра b , см. рисунок) и приближаются к другому предельному случаю — к выражению (10) с зависимостью $\rho/\rho_0 \sim 1/x^2$, соответствующей газовой оболочке с массой, значительно большей массы планеты. Приравняв асимптотики (16) и (10), можно оценить безразмерную высоту x_g , начиная с которой становится существенно влияние самогравитации на плотность газовой оболочки:

$$x_g = \sqrt{\frac{2}{3ab}} e^a. \quad (17)$$



Зависимость плотности газовой оболочки планеты от безразмерного расстояния $x = r / R_c$ при различных значениях параметров a и b . Красные кривые — $a = 30$, зеленые — $a = 10$, синие — $a = 3,5$, сплошные кривые — $b = 1$, штриховые — $b = 0,036$, штрихпунктирные — $b = 0,002$. Серая пунктирная кривая — расчет по барометрической формуле (15), серая штриховая кривая — расчет по формуле (10), вертикальная черная штриховая линия — безразмерный радиус Хилла для системы Юпитер и Солнце (18)

Отметим, что область гравитационного влияния планеты ограничена радиусом Хилла [24] r_H — радиусом сферической области вокруг планеты, внутри которой гравитационное влияние планеты преобладает над гравитационным влиянием звезды:

$$r_H = D \sqrt[3]{\frac{M}{3M_*}}, \quad (18)$$

где D — расстояние от планеты до звезды;
 M_* — масса звезды.

Только внутри области, ограниченной радиусом Хилла, ядро планеты способно гравитационно удерживать свою газовую оболочку.

Предполагая, что масса M в основном определяется массой планеты M_c , формулу (18) можно переписать в виде:

$$\frac{r_H}{R_c} = \sqrt[3]{\frac{\rho_c}{\rho_*} \frac{D}{R_*}}, \quad (19)$$

где R_* — радиус звезды;

ρ_c и ρ_* — плотности планеты и звезды соответственно.

Считая, что плотности планеты ρ_c и звезды ρ_* примерно равны, и учитывая, что ρ_c и ρ_* входят в уравнение (19) под знаком кубического корня, можно считать, что отношение r_H/R_c

определяется только отношением D/R_* , т. е. значение r_H/R_c является фиксированным для заданного положения планеты и не зависящим от параметров a и b .

На рисунке вертикальной черной штриховой линией показан безразмерный радиус Хилла (19) для системы Юпитер и Солнце ($r_H/R_c \approx 1,06 \cdot 10^3$). Из рисунка следует, что для параметров a и b , характерных для протоюпитера, внутри радиуса Хилла наблюдаются все три предельных случая зависимости плотности газовой оболочки, соответствующих барометрической формуле (3), выходу на плато (асимптотика (16)) и обратной степенной зависимости (10).

Для Земли ($r_H/R_c \approx 0,21 \cdot 10^3$) и Юпитера, для которых параметр a очень большой (744 и 3886 соответственно), а плотность ρ_0 мала, плотность газовой оболочки ρ в области плато (в соответствии с формулой (15)) чрезвычайно мала, и расстояние, начиная с которого следует учитывать самогравитацию, становится значительно больше радиуса Хилла. Поэтому для этих планет на всех разумных расстояниях (меньших радиуса Хилла) справедливы формулы (3) и (15).

Без сомнения, ситуация, подобная протоюпитеру, возможна и для других планетных систем.

Заключение

В настоящей работе численно получено единое решение уравнений для плотности газовой оболочки планеты для всего пространства, в котором преобладает гравитационное влияние планеты, — в диапазоне расстояний от поверхности планеты до радиуса Хилла, и впервые проведен анализ полученного решения методом подобия. Вблизи планеты решение совпадает с классической барометрической формулой, на промежуточных расстояниях — с барометрической формулой, учитывающей зависимость ускорения свободного падения от расстояния до планеты, на больших расстояниях — с зависи-

мостью плотности для сингулярной изотермической газовой сферы, обусловленной самогравитацией.

Полученные результаты могут быть полезны как для преподавателей физики высших учебных заведений, так и для научных сотрудников, занимающихся астрофизикой.

Библиографический список

1. Berberan-Santos M. N. On the Barometric Formula / M. N. Berberan-Santos, E. N. Bodunov, L. Pogliani // Amer. J. Phys. — 1997. — Vol. 65. — P. 404. — DOI: 10.1119/1.18555.
2. Landau L. D. Statistical Physics / L. D. Landau, E. M. Lifshiz. — Pergamon Press, 1969. — Vol. 5. — P. 108.
3. Berberan-Santos M. N. Liquid — Vapor Equilibrium in a Gravitational Field / M. N. Berberan-Santos, E. N. Bodunov, L. Pogliani // Amer. J. Phys. — 2002. — Vol. 70. — P. 438. DOI: 10.1119/1.1424264.
4. Berberan-Santos M. N. On the Barometric Formula inside the Earth / M. N. Berberan-Santos, E. N. Bodunov, L. Pogliani // J. Math. Chem. — 2010. — Vol. 47. — P. 990. — DOI: 10.1007/s10910-009-9620-7.
5. Rodrigues D. S. Analyzing Atmospheric Pressure Variations in Time and Height: a Didactic Proposal Employing a Smartphone Barometer / D. S. Rodrigues, F. J. Arnold // Revista Brasileira de Ensino de Física. — 2022. — Vol. 44. — P. e20210422. — DOI: 10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0422.
6. Sliško J. The Physical Cause of Atmospheric Pressure: Weight of Air or Molecular Motion and Impacts? / J. Sliško, T. M. Topalović, M. Božić // The Physics Teacher. — 2021. — Vol. 59. — P. 470. — DOI: 10.1119/10.0006132.
7. Bodunov E. N. Barometric Formula for Non-Isothermal Atmosphere / E. N. Bodunov, G. G. Khokhlov // J. Phys.: Conf. Ser. — 2021. — Vol. 2131. — P. 022053. — DOI: 10.1088/1742-6596/2131/2/022053.
8. Wang J. Improving the Vertical Modeling of Tropospheric Delay / J. Wang, K. Balidakis, F. Zus et al. // Geophys. Research Lett. — 2022. — Vol. 49(5). — P. e2021GL096732. — DOI: 10.1029/2021GL096732.

9. Michalak P. Impact of Air Density Variation on a Simulated Earth-to-Air Heat Exchanger's Performance / P. Michalak // *Energies*. — 2022. — Vol. 15(9). — P. 3215. — DOI: 10.3390/en15093215.
10. Stenner C. Development and Persistence of Hazardous Atmospheres in a Glaciovolcanic Cave System — Mount Rainier, Washington, USA. / C. Stenner, A. Pflitsch, L. J. Florea et al. // *J. Cave & Karst Studies*. — 2022. — Vol. 84(2). — P. 66. — DOI: 10.4311/2021ex0102.
11. Chkeir S. Nowcasting extreme rain and extreme wind speed with machine learning techniques applied to different input datasets / S. Chkeir, A. Anesiadou, A. Mascitelli et al. // *Atmospheric Research*. — 2023. — Vol. 282. — P. 106548. — DOI: 10.1016/j.atmosres.2022.106548.
12. Dubinov A. E. Mathematical Tricks for Pseudopotentials in the Theories of Nonlinear Waves in Plasmas / A. E. Dubinov // *Physics of Plasmas*. — 2022. — Vol. 29. — P. 020901. — DOI: 10.1063/5.0078573.
13. Dubinov A. E. Barometric Formula for Ultrarelativistic Degenerate Fermi-Gases / A. E. Dubinov // *Astrophysics*. — 2020. — Vol. 63(4). — P. 580. — DOI: 10.1007/s10511-020-09660-1.
14. Moon J. Design of Air-cooled Waste Heat Removal System with String Type Direct Contact Heat Exchanger and Investigation of Oil Film Instability / J. Moon, Y. H. Jeong, Y. Addad // *Nuclear Engineering and Technology*. — 2020. — Vol. 52(4). — P. 734. — DOI: 10.1016/j.net.2019.10.010.
15. Shu F. N. *The Physics of Astrophysics* / F. N. Chu. — California: Univer. Sci. Books, 1992. — Vol. II — P. 246.
16. Ткаченко Р. В. Гравитационная неустойчивость газопылевых околядерных дисков близких галактик / Р. В. Ткаченко, В. И. Корчагин, Б. Б. Жмайлов. // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. — 2022. — Т. 9(67). — № 3. — С. 561. — DOI: 10.21638/spbu01.2022.316.
17. Patra N. N. Theoretical modelling of two-component molecular discs in spiral galaxies / N. N. Patra // *Astronomy & Astrophysics*. — 2020. — Vol. 638. — P. A66. — DOI: 10.1051/0004-6361/201936483.
18. Bodmer D. Asymptotic tracking position control with active oscillation damping of a multibody Mars vehicle using two artificial augmentation approaches / D. Bodmer, M. Krenmayr, F. Holzappel // *CEAS Space J.* — 2022. — Vol. 14. — P. 125. — DOI: 10.1007/s12567-021-00364-6.
19. Тейлер Р. *Строение и эволюция звезд* / Р. Тейлер. — М.: Мир, 1973. — 276 с.
20. Mizuno H. Formation of the Giant Planets / H. Mizuno // *Progress of Theoretical Physics*. — 1980. — Vol. 64(2). — P. 544. — DOI: 10.1143/PTP.64.544.
21. Semenov A. O. Upper Thermal Boundary Layer of Planetary Atmosphere: An Attempt of Developing a General Model / A. O. Semenov, G. M. Shved // *Icarus*. — 2008. — Vol. 194(1). — P. 290. — DOI: 10.1016/j.icarus.2007.08.040.
22. Shved G. M. The Standard Problem of Nonlocal Thermodynamic Equilibrium Radiative Transfer in the Rovibrational Band of the Planetary Atmosphere / G. M. Shved, A. O. Semenov // *Solar System Research*. — 2001. — Vol. 35. — P. 212. — DOI: 10.1023/A:1010478906172.
23. Bodenheimer P. Calculations of the Accretion and Evolution of Giant Planets: The Effects of Solid Cores / P. Bodenheimer, J. B. Pollack // *Icarus*. — 1986. — Vol. 67(3). — P. 391. — DOI: 10.1016/0019-1035(86)90122-3.
24. Pečnik B. Giant Planet Formation. A First Classification of Isothermal Protoplanetary Equilibria / B. Pečnik, G. Wuchterl // *Astronomy & Astrophysics*. — 2005. — Vol. 440. — P. 1183. — DOI: 10.1051/0004-6361:200500005.

Дата поступления: 23.01.2023

Решение о публикации: 14.02.2023

Контактная информация:

БОДУНОВ Евгений Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой «Физика»;

evgeny.bodunov@inbox.ru

СЕМЕНОВ Алексей Олегович — канд. физ.-мат. наук, доц.; aleksem@mail.ru

Density Distribution in the Gaseous Envelope of the Planet

E. N. Bodunov, A. O. Semenov

Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, 9, Moskovsky pr., Saint Petersburg, 190031, Russian Federation

For citation: Bodunov E. N., Semenov A. O. Density Distribution in the Gaseous Envelope of the Planet // *Proceedings of Petersburg Transport University*, 2023, vol. 20, iss. 1, pp. 101–109. (In Russian). DOI: 10.20295/1815-588X-2023-1-101-109

Summary

Purpose: Theoretical study of gas density distribution around the planet given self-gravity. **Methods:** Proposed in this paper equations for the planet gaseous envelope density with corresponding boundary conditions are solved analytically and numerically by Runge-Kutta method. **Results:** For the first time, the analysis of numerical solution of equations for all the space where the planet gravitational influence prevails - in the distance range from the planet surface till Hill radius - has been pursued using similarity method. Near the planet, the solution coincides with classical barometric formula, at intermediary distances, - with barometric formula which takes into consideration the dependence of free fall acceleration from the distance till the planet, at large distances, - with the dependence of density for singular isothermal gas sphere due to self-gravity. **Practical significance:** On the basis of the solution obtained, the unified picture of the planet gaseous envelope density distribution was analyzed. The results presented in the paper can be useful both for university physics professors and for the researchers involved in astrophysics.

Keywords: The planet gaseous environment, self-gravity, barometric formula, Poisson equation, gas density in gaseous accumulations, Hill radius.

References

1. Berberan-Santos M. N., Bodunov E. N., Pogliani L. On the Barometric Formula. *Amer. J. Phys*, 1997, vol. 65, p. 404. DOI: 10.1119/1.18555.
2. Landau L. D., Lifshiz E. M. *Statistical Physics*. Pergamon Press, 1969, vol. 5, p. 108.
3. Berberan-Santos M. N., Bodunov E. N., Pogliani L. Liquid — Vapor Equilibrium in a Gravitational Field, 2002, vol. 70, p. 438. DOI: 10.1119/1.1424264.
4. Berberan-Santos M. N., Bodunov E. N., Pogliani L. On the Barometric Formula inside the Earth. *J. Math. Chem*, 2010, vol. 47, p. 990. DOI: 10.1007/s10910-009-9620-7.
5. Rodrigues D. S., Arnold F. J. Analyzing Atmospheric Pressure Variations in Time and Height: a Didactic Proposal Employing a Smartphone Barometer. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 2022, vol. 44, p. e20210422. DOI: 10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0422.
6. Sliško J., Topalović T. M., Božić M. The Physical Cause of Atmospheric Pressure: Weight of Air or Molecular Motion and Impacts? *The Physics Teacher*, 2021, vol. 59, p. 470. DOI: 10.1119/10.0006132.
7. Bodunov E. N., Khokhlov G. G. Barometric Formula for Non-Isothermal Atmosphere. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 2131, p. 022053. DOI: 10.1088/1742-6596/2131/2/022053.
8. Wang J., Balidakis K., Zus F. et al. Improving the Vertical Modeling of Tropospheric Delay. *Geophys. Research Lett*, 2022, vol. 49(5), p. e2021GL096732. DOI: 10.1029/2021GL096732.
9. Michalak P. Impact of Air Density Variation on a Simulated Earth-to-Air Heat Exchanger's Performance. *Energies*, 2022, vol. 15(9), p. 3215. DOI: 10.3390/en15093215.
10. Stenner C., Pflitsch A., Florea L. J. et al. Development and Persistence of Hazardous Atmospheres in a Glaciovolcanic Cave System — Mount Rainier, Washington, USA. *J. Cave & Karst Studies*, 2022, vol. 84(2), p. 66. DOI: 10.4311/2021ex0102.

11. Chkeir S., Anesiadou A., Mascitelli A. et al. Nowcasting extreme rain and extreme wind speed with machine learning techniques applied to different input datasets. *Atmospheric Research*, 2023, vol. 282, p. 106548. DOI: 10.1016/j.atmosres.2022.106548.
12. Dubinov A. E. Mathematical Tricks for Pseudopotentials in the Theories of Nonlinear Waves in Plasmas. *Physics of Plasmas*, 2022, vol. 29, p. 020901. DOI: 10.1063/5.0078573.
13. Dubinov A. E. Barometric Formula for Ultrarelativistic Degenerate Fermi-Gases. *Astrophysics*, 2020, vol. 63(4), p. 580. DOI: 10.1007/s10511-020-09660-1.
14. Moon J., Jeong Y. H., Addad Y. Design of Air-cooled Waste Heat Removal System with String Type Direct Contact Heat Exchanger and Investigation of Oil Film Instability. *Nuclear Engineering and Technology*, 2020, vol. 52(4), p. 734. DOI: 10.1016/j.net.2019.10.010.
15. Shu F. N. *The Physics of Astrophysics*. California: Univer. Sci. Books, 1992, vol. II, p. 246.
16. Tkachenko R. V., Korchagin V. I., Zhmaylov B. B. Gravitatsionnaya neustoychivost' gazopylevykh okoloyadernykh diskov blizkikh galaktik [Gravitational instability of gas and dust circumnuclear disks of nearby galaxies]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya* [Bulletin of St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy]. 2022, vol. 9(67), Iss. 3, pp. 561. DOI: 10.21638/spbu01.2022.316. (In Russian)
17. Patra N. N. Theoretical modelling of two-component molecular discs in spiral galaxies. *Astronomy & Astrophysics*, 2020, vol. 638, p. A66. DOI: 10.1051/0004-6361/201936483.
18. Bodmer D., Krenmayr M., Holzapfel F. Asymptotic tracking position control with active oscillation damping of a multibody Mars vehicle using two artificial augmentation approaches. *CEAS Space J.*, 2022, vol. 14, p. 125. DOI: 10.1007/s12567-021-00364-6.
19. Teyler R. *Stroenie i evolyutsiya zvezd* [Structure and evolution of stars]. Moscow: Mir Publ., 1973, 276 p. (In Russian)
20. Mizuno H. Formation of the Giant Planets. *Progress of Theoretical Physics*, 1980, vol. 64(2), p. 544. DOI: 10.1143/PTP.64.544.
21. Semenov A. O., Shved G. M. Upper Thermal Boundary Layer of Planetary Atmosphere: An Attempt of Developing a General Model. *Icarus*, 2008, vol. 194(1), p. 290. DOI: 10.1016/j.icarus.2007.08.040.
22. Shved G. M., Semenov A. O. The Standard Problem of Nonlocal Thermodynamic Equilibrium Radiative Transfer in the Rovibrational Band of the Planetary Atmosphere. *Solar System Research*, 2001, vol. 35, p. 212. DOI: 10.1023/A:1010478906172.
23. Bodenheimer P., Pollack J. B. Calculations of the Accretion and Evolution of Giant Planets: The Effects of Solid Cores. *Icarus*. 1986, vol. 67(3), p. 391. DOI: 10.1016/0019-1035(86)90122-3.
24. Pečnik B., Wuchterl G. Giant Planet Formation. A First Classification of Isothermal Protoplanetary Equilibria. *Astronomy & Astrophysics*. 2005, vol. 440, p. 1183. DOI: 10.1051/0004-6361:200500005.

Received: January 23, 2023

Accepted: February 14, 2023

Author's information:

Evgeniy N. BODUNOV — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department “Physics”; evgeny.bodunov@inbox.ru

Aleksey O. SEMENOV — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; aleksem@mail.ru