

УДК 625.03

Разработка и обоснование математической модели исследования колебаний трамвая

Е. П. Дудкин, Я. С. Хомяков, А. А. Зайцев

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Российская Федерация, 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9

Для цитирования: Дудкин Е. П., Хомяков Я. С., Зайцев А. А. Разработка и обоснование математической модели исследования колебаний трамвая // Бюллетень результатов научных исследований. — 2025. — Вып. 4. — С. 100–116. DOI: 10.20295/2223-9987-2025-4-100-116

Аннотация

Цель: Разработать и обосновать математическую (компьютерную) модель взаимодействия многосекционного трамвайного экипажа с рельсовым путем, предназначенную для анализа поперечной устойчивости (виляния), вертикальной динамики и влияния параметров пути (ширина колеи, подуклонка, неровности и волнообразный износ) на безопасность и комфорт движения. **Методы:** Описана методика динамического моделирования движения трамвая в программном комплексе «Универсальный механизм» в виде сложной механической системы в постановке с инерционной моделью пути, детализированной шарнирно-силовой схемой экипажа и нелинейным контактом «колесо — рельс». **Результаты:** Приведены верификационные тесты и адаптация модели по данным натурного эксперимента, подтвердившие сходимость на уровне от 3 до 12,5 % по величине среднеквадратичных ускорений кузова. Результаты исследования подтвердили пригодность модели для обоснования норм по устройству и содержанию трамвайных путей на прямых участках. **Практическая значимость:** Разработанная модель может быть пригодна для обоснования выбора ширины колеи и подуклонки, допусков отклонений рельсовой колеи в плане и профиле, параметров допускаемого волнообразного износа, а также для оценки допустимых скоростей при заданном состоянии колес и пути. Работа дополняет существующие исследования взаимодействия экипажа и пути на рельсовом транспорте, характеризуя трамвайную кинематику, и демонстрирует воспроизводимую процедуру верификации и адаптации модели на натурных данных.

Ключевые слова: Трамвай, колесо — рельс, виляние, ширина колеи, динамика экипажа, универсальный механизм.

Внедрение скоростного трамвая является приоритетом в развитии городского рельсового транспорта современных городов-миллионников, поскольку сокращает время поездки и повышает привлекательность общественного транспорта, снижает использование личного транспорта и разгружает улично-дорожную сеть. Однако повышение скорости обостряет проблемы динамического взаимодействия подвижного состава и рельсового пути, в частности поперечной устойчивости (виляния), уровней непогашенных ускорений в салоне и контактных сил «колесо — рельс», влияющих на безопасность и комфорт движения.

Основное влияние на горизонтальную динамику рельсовых экипажей со стороны рельсового пути оказывает зазор между колесом и рельсом, который определяется шириной колеи. Действующая нормативная база для трамвайного пути устанавливает номинальную ширину колеи 1524 мм в прямых и задает допуски

в эксплуатации [1], сама методика измерения ширины была уточнена недавно, в изменении 3 к СП 98.13330.2018 в п. 5.44 с 01.03.2025, где установлено, что:

«Ширину колеи измеряют между внутренними гранями головок рельсов на уровне ниже плоскости, соединяющей верхние точки поверхностей катания рельсов:

- при рельсах РТ62 на 8 мм;
- при рельсах Р65 на 13 мм» [2].

Динамический характер взаимодействия колеса и рельса описывает поперечное непогашенное ускорение. В СП 98.13330.2018 зафиксировано, что конструкция пути «должна сводить к минимуму непогашенные поперечные ускорения, возникающие при допустимых скоростях движения, и величину их изменения за единицу времени» [2], однако конкретные значения этих величин не устанавливает, в других нормативных документах городского рельсового транспорта данные значения также не установлены. На магистральных железных дорогах норма непогашенного ускорения для пассажирских поездов регламентирована требованиями СП 119.13330.2024 и составляет $0,7 \text{ м/с}^2$ [3].

Применительно к городскому рельсовому транспорту действуют санитарные нормы СП 2.5.3650—20 [4], которые ограничивают уровни вибраций в салоне в 1/3-октавных полосах (от 1 до 80 Гц) и являются дополнительным критерием приемлемости динамического взаимодействия подвижного состава и пути.

Основной эксплуатант городского рельсового транспорта Санкт-Петербурга — СПб ГУП «Горэлектротранс», имеющий в своем парке современные сочлененные трамвайные вагоны семейства «Витязь», обозначил практическую проблему: при движении на повышенных скоростях на прямых участках пути наблюдается значительное влияние экипажа, сопровождающееся ростом виброускорений и ухудшением комфорта пассажиров. Для выявления первопричин появления раскачки и количественной оценки влияния параметров пути и ходовых частей подвижного состава кафедрой «Строительство дорог транспортного комплекса» ПГУПС были выполнены натурные испытания взаимодействия «путь — экипаж» на трамваях «Витязь» с регистрацией виброускорений по трем осям на различных скоростях. Методика, условия проведения и ключевые результаты этих испытаний детально изложены в статье [5].

В натурных испытаниях на вагонах 71-931М «Витязь-М» на прямых участках, при скорости порядка 50 км/ч, обнаружен резкий рост амплитуды поперечных ускорений кузова на частотах 1–2 Гц до уровня $\approx 0,7 \text{ м/с}^2$, что значительно превышает предельное значение $0,2 \text{ м/с}^2$, установленное санитарными правилами [4] для горизонтального направления.

Эксплуатационные исследования СПб ГУП «Горэлектротранс» показывают, что это явление чаще всего проявляется на крайних тележках после пробега 15–20 тыс. км, при том что ширина колеи на «проблемных» участках движения соответствует нормативным значениям.

Аналогичную проблему исследовали ранее на магистральных железных дорогах. В результате этих исследований в 1980-х годах ширина колеи на магистральных дорогах СССР была унифицирована и уменьшена с 1524 до 1520 мм.

В работе [6] описаны исследования ширины колеи на прямых участках Московского метрополитена, где были выполнены испытания на участках с шириной колеи 1516, 1520, 1524 мм. Сужение колеи с 1524 до 1520 мм привело к снижению поперечных ускорений на 22–24 %, а до 1516 мм — на 31–35 %.

В конце 1990-х гг. Днепропетровский институт инженеров транспорта провел исследования движения четырехосных полувагонов на тележках модели 18-100 и зафиксировал рост амплитуд колебаний виляния и поперечных ускорений при увеличении зазора в колесе вплоть до 0,55g при 80 км/ч [7]. Эти данные подтверждают, что эксплуатационный зазор, определяемый не только шириной колеи, но также насадкой колес на ось, профилями и износом, является определяющим параметром устойчивости.

Обоснования унификации колеи опирались на многолетние исследования ВНИИЖТ, МИИТ и др., где было показано, что уменьшение ширины колеи и, соответственно, эксплуатационного зазора снижает боковые ускорения и рамные силы, а также повышает устойчивость движения [6, 8], что подтверждается и современными исследованиями [7].

В хозяйстве городского рельсового транспорта влияние ширины колеи на эксплуатационное поведение пути отражено в работе О. Н. Садикова [9], где на основе опыта службы пути Ленинградского трамвая приведен эмпирический график изменения колеи в эксплуатации при различных значениях начальной ширины колеи (рис. 1).

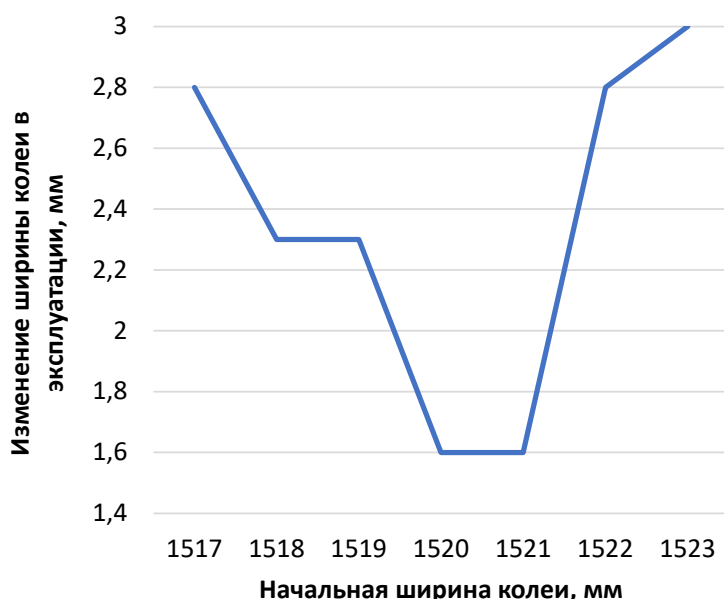


Рис. 1. Зависимость эксплуатационного изменения ширины колеи от начального шаблона

Минимальные изменения колеи фиксировались при величине $\approx 1520\text{--}1521$ мм, при дальнейшем сужении появлялось частичное заклинивание колесной пары с динамическим отжатием рельсов и остаточным уширением, тогда как при ширине больше 1521 мм увеличение зазора приводило к росту угла набега колеса и ускорению эксплуатационных изменений ширины колеи, что также указывает на оптимальную ширину колеи 1520 мм. Таким образом, выполненные экспериментальные и эксплуатационные исследования в области рельсового транспорта убедительно показывают влияние ширины колеи на устойчивость движения экипажей в прямых участках пути. Однако обоснование ширины колеи и допусков на ее изменение в зависимости от скорости движения, типа экипажа и других условий эксплуатации требует проведения комплексных теоретических исследований. Это невозможно без разработки специализированной модели трамвайного экипажа и пути, верифицированной по натурным данным.

Проблема динамического взаимодействия подвижного состава и рельсового пути является комплексной и требует системного подхода. Современные международные исследования, в частности работы Чжай Ваньмина [10], демонстрируют эффективность рассмотрения системы «экипаж — путь» как единого целого (*vehicle-track coupled dynamics*) для прогнозирования влияния, вертикальной динамики и оценки устойчивости.

Разрабатываемая в настоящем исследовании модель также реализует указанный интегральный подход, адаптируя его к специфике сочлененной конструкции трамвайного экипажа и параметрам городского пути.

При разработке модели за основу взят сочлененный трамвайный вагон 71-931М «Витязь-М», масса тары которого 37 т по паспортным данным производителя [11]. Для исследования разработана модель системы с применением современного программного комплекса «Универсальный механизм», который реализует методы многотельной динамики для механических систем с кинематическими связями, нелинейными элементами и контактами.

Рельсовый путь

Исходя из задач работы — исследование взаимодействия «колесо — рельс», оценка устойчивости, отклика на неровности и критической скорости — в качестве расчетной принята инерционная модель пути. Она представляет собой компромисс по уровню сложности и обеспечивает физически достаточную точность.

Данная модель описывает путь заданной геометрии рельсом в виде абсолютно твердого тела с тремя степенями свободы (рис. 2):

- вертикальное перемещение (1 – Z);
- поперечное перемещение (2 – Y);
- вращение вокруг продольной оси (3 – R_x).

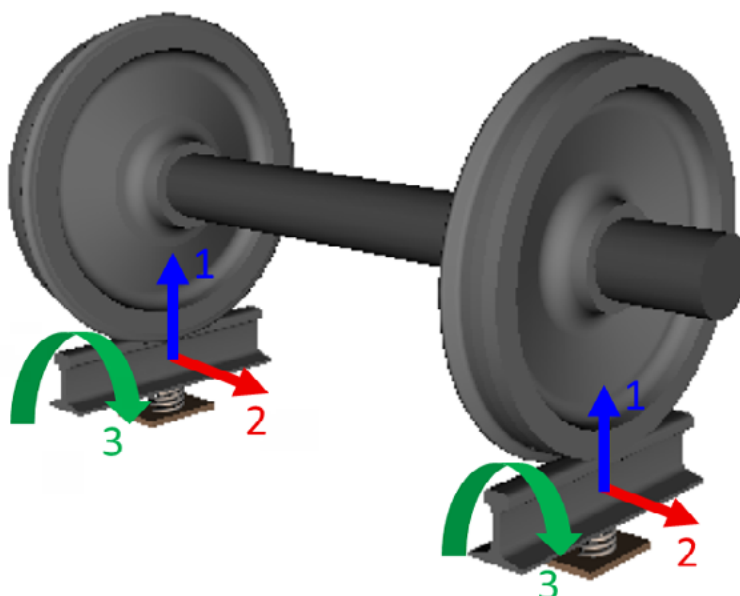


Рис. 2. Степени свободы инерционной модели пути

Подрельсовое основание в данном описании задается эквивалентными упругодемпфирующими связями, обеспечивающими достоверность в частотном диапазоне до ~ 100 Гц и корректную работу при контактной нелинейности (включая возможную кратковременную потерю контакта колеса с рельсом). Распределенная гибкость рельса и волновые эффекты, значимые для высокочастотных задач, в данной постановке не моделируются, для них требуется упругая модель пути [12].

Модель экипажа

Экипаж в разработанной модели представлен как система из 27 абсолютно твердых тел:

- 6 колесных пар;
- 12 корпусов букс;
- 3 рамы тележек;
- 3 шкворневых балки;
- 3 секции кузова.

Массо-инерционные параметры заданы на основании данных, рассчитанных в САД-системе, а также паспортных характеристик.

Конструкция тележки трамвая «Витязь» имеет двухступенчатую систему подвешивания. Первая ступень связывает буксы с рамой тележки и обеспечивает вертикальную податливость для гашения вертикальных колебаний. Букса фиксируется на раме через поворотный шарнир, при этом нагрузка воспринимается наклонными пружинно-демпфирующими элементами.

В модели данный узел описывается поворотным шарниром с одной степенью свободы вокруг оси Y . Силовая модель пружин задается силой, определяемой следующим выражением:

$$F = F_0 - c(x - x_0) - d \cdot v,$$

где F_0 — сила в положении равновесия;
 c — приведенный коэффициент жесткости;
 d — приведенный коэффициент диссипации;
 x_0 — свободная длина (в положении равновесия).

Характеристики пружины, люфты и податливость резинометаллических элементов конструкции учитываются эквивалентно в c и d , а силы трения в шарнире не моделируются.

Таким образом, характеристика первой ступени подвешивания задается тремя параметрами:

1. Коэффициент жесткости — определяет перемещения и частоты колебаний.
2. Коэффициент диссипации — определяет затухание колебаний и устойчивость к резонансам.
3. Свободная длина — задает геометрию в положении покоя и величину предварительного сжатия.

Вторая ступень реализована между рамой тележки шкворневой балкой. Узел задает передачу вертикальных нагрузок от кузова, ограничение крена кузова и направляющую способность тележки. Вторая ступень подвешивания допускает поперечные и вертикальные перемещения шкворневой балки (и кузова), а также вращение вокруг оси X .

Упругая составляющая второй ступени моделируется эквивалентными жесткостями — вертикальной, поперечной и изгибной. Демпфирующая составляющая описывается характеристиками гасителя колебаний в вертикальном направлении Z , а также линейными диссипативными связями по осям X и Y для согласования уровней затухания.

Таким образом, характеристика второй ступени подвешивания задается шестью параметрами:

1. Эквивалентный коэффициент вертикальной жесткости — определяет статическую осадку кузова, перемещения и собственные частоты в паре «кузов — тележка».
2. Эквивалентный коэффициент поперечной жесткости — влияет на рамные силы, поперечные и продольные колебания кузова.
3. Эквивалентный коэффициент изгибной жесткости — формирует крен кузова.

4. Вертикальный показатель диссипации — отражает работу гасителей колебаний при сжатии и отбое подвешивания.

5. Продольный коэффициент диссипации — учитывает гашение энергии в продольном направлении при взаимодействии реальных элементов конструкции экипажа, не моделируемых явно.

6. Поперечный коэффициент диссипации — учитывает гашение энергии в поперечном направлении при взаимодействии реальных элементов конструкции экипажа, не моделируемых явно.

Отличительным элементом рассматриваемого экипажа является буксовый узел со сферическим самоустанавливающимся роликовым подшипником. Промежуточные исследования его моделирования показали, что чисто вращательное описание (3 степени свободы) переоценивает связь колес в оси при проходе вертикальных неровностей. Кроме того, такой подход не учитывает наличие люфтов:

- в соединении корпуса буксы с рамой;
- в посадке подшипника на корпусе буксы.

Добавление дополнительной поступательной степени свободы по Y с ограничениями (± 3 мм как половина люфта) адекватно воспроизводит кинематику и снижает паразитное вовлечение второго колеса в колебания, что видно при сравнении графиков на рис. 3 и 4.

Передача нагрузок от кузова экипажа на тележки выполняется через шкворневой узел.

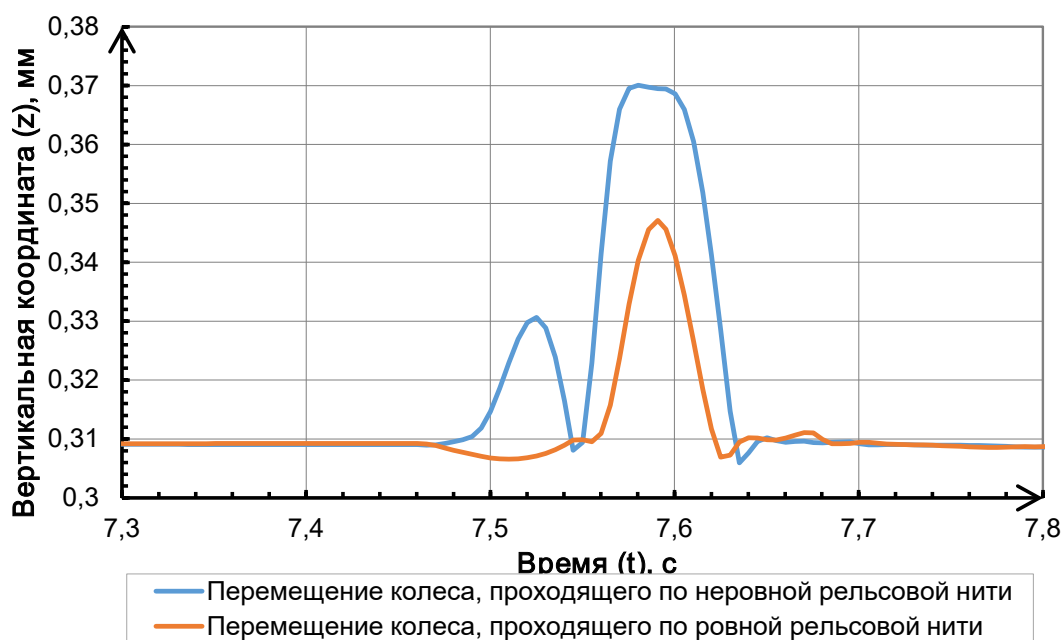


Рис. 3. Реакция колес на прохождение одиночной вертикальной неровности при описании буксового подшипника тремя степенями свободы

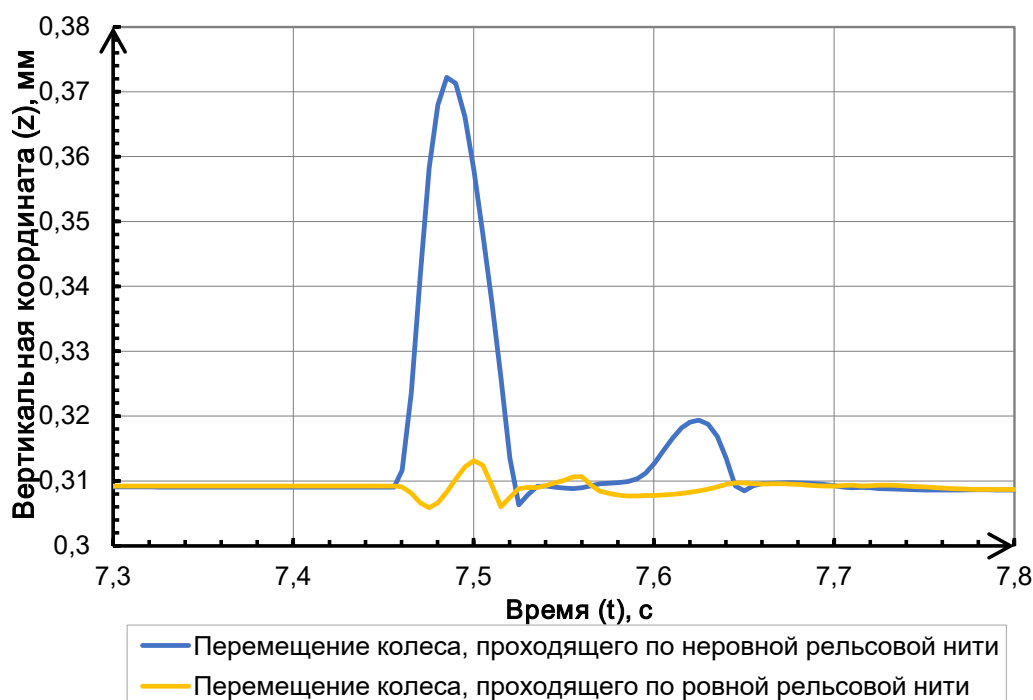


Рис. 4. Реакция колес на прохождение одиночной вертикальной неровности при описании буксового подшипника четырьмя степенями свободы

Передняя и задняя тележки трамвая «Витязь» — поворотные; они обеспечивают прохождение экипажем кривых участков пути. Соответственно, передняя и задняя кузовные секции передают нагрузки на тележку через шкворневой узел, смоделированный в виде поворотного шарнира.

Промежуточные результаты моделирования показали, что пренебрежение фрикционными моментами в шкворневом узле поворотных тележек занижает запас устойчивости и снижает критическую скорость трамвайного экипажа, провоцируя неестественный рост поперечных колебаний кузова. Поэтому необходим учет трения в шкворне для поворотных тележек; он описывается через момент трения с переходом «сцепление — скольжение».

Средняя секция опирается на неповоротную тележку. Однако для описания этого сочленения в модель необходимо ввести квазиповоротную степень свободы с малым пределом (0,001 рад) и жесткими ограничителями — во избежание численной «раскрутки» колебаний экипажа.

Таким образом, характеристика сочленения поворотных тележек с крайними секциями кузова задается совокупностью из четырех фрикционно-упругих параметров шкворня:

- предельный момент трения в шкворневом узле;
- отношение коэффициента трения сцепления к коэффициенту трения скольжения;
- коэффициент контактной жесткости при сцеплении (определяет сопротивление упругому повороту тележки относительно секции);

– коэффициент контактной диссипации при сцеплении (определяет затухание угловых колебаний).

Характеристика сочленения неповоротной тележки с центральной секцией кузова, помимо совокупности из четырех фрикционно-упругих параметров шкворня, дополняется параметрами на условную поворотную координату (ограничением поворота):

- допустимый угол поворота (люфта) в шкворне (предельно малый);
- коэффициент контактной жесткости в зоне люфта, предотвращающий значительные угловые перемещения;
- коэффициент контактной диссипации в зоне люфта, исключающий высокочастотные колебания.

Секции кузова соединены двумя отличными узлами сочленений и наравне с поворотными тележками обеспечивают прохождение кривых участков пути. Переднее сочленение (между первой и средней секциями) представляет собой плоский шарнир с одной степенью свободы: поворот вокруг вертикальной оси с трением, но дополнительно вводится поперечная поступательная координата с малым зазором для имитации неабсолютной жесткости и подавления численной «раскрутки» колебаний. Для описания данного узла задаются 7 параметров:

- предельный момент трения по вертикальной оси;
- отношение коэффициентов трения сцепления/скольжения;
- коэффициент контактной жесткости при сцеплении;
- коэффициент контактной диссипации при сцеплении;
- допустимый поперечный зазор;
- жесткость в зоне люфта;
- диссипация в зоне люфта.

Заднее сочленение (между средней и задней секциями) использует те же параметры по вертикальной оси и дополнительно имеет степень свободы вокруг поперечной оси (складывание), что обеспечивает работу на переломах профиля, но силовыми ограничениями в ней пренебрегается.

Инструментарий программного комплекса «Универсальный механизм» позволяет смоделировать контакт «колесо — рельс» нелинейно с возможностью перехода «контакт — разрыв» и описывает это взаимодействие моделью В. Кика и И. Пиотровского.

Геометрия колес и рельсов задается профилями; ширина колеи и подуклонка выступают как варьируемые параметры.

Входные переменные включают:

- отклонения пути в плане и профиле (в том числе неровности по ПНСТ 511—2020 [13]);
- длины и амплитуды волн волнообразного износа;
- скорость движения.

Реализация описанной модели позволяет получать вертикальные и горизонтальные контактные силы взаимодействия «колесо — рельс», рамные силы, среднеквадратичные значения (СКЗ) амплитуд и ускорений кузова, собственные частоты подсистем, коэффициенты вертикальной динамики, показатели устойчивости и критическую скорость.

Перед динамическими «прогонками» модели вычисляется равновесие системы методом «численного успокоения». Постпроцессор программы используется для статистической обработки полученных результатов и многовариантных расчетов.

Разработанная модель верифицируется в соответствии с существующей теорией и адаптируется по результатам натурных испытаний.

Верификация включает:

- статический анализ (согласование суммарных вертикальных реакций с массой тары, проверка поперечной симметрии реакций в контакте колес с рельсами);
- анализ движения по идеальному прямому пути (оценка малости колебаний, рамных сил, коэффициента динамики);
- анализ прохождения левосторонних и правосторонних кривых одинаковых параметров (проверка поперечной симметрии отклика модели на изменение геометрии пути);
- оценку реакции на одиночные синусоидальные неровности профиля и плана (анализ формы отклика, затухания, непрерывности контакта);
- определение критической скорости по росту среднеквадратичного отклонения поперечных перемещений колесной пары при дискретном варьировании скорости.

Результаты верификационных проверок показали, что суммарные вертикальные реакции в контактах «колесо — рельс» составили 363 кН, что соответствует массе тары 37 т. При этом левые и правые реакции в каждой колесной паре совпадали, что подтверждает корректность заданных масс и центров масс, а также поперечную симметрию модели.

При равномерном движении на скорости 75 км/ч по «идеальному пути» среднеквадратичные значения амплитуд и ускорений кузова по осям близки к нулю, рамные силы (не более 295 Н) существенно ниже значений, характерных для неровного пути, коэффициенты вертикальной динамики принимают значения от 1,9 до 2,1, а коэффициент запаса устойчивости 5,0. Небольшие остаточные колебания объясняются дискретизацией и остаточными силами после «успокоения».

При моделировании движения экипажа в разносторонних кривых с одинаковыми параметрами ($R = 600$ м, возвышение 100 мм, скорость 70 км/ч) получены симметричные по модулю численные ряды поперечных перемещений кузова для левых и правых кривых (рис. 5).

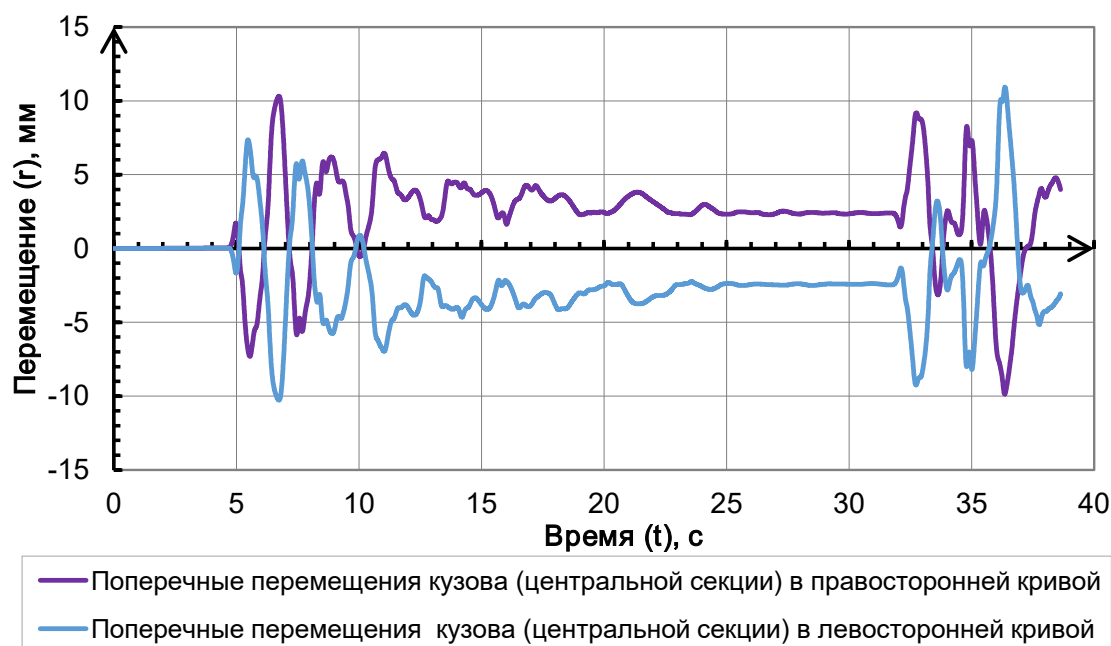


Рис. 5. Реакция кузова (средней секции) при движении в кривых разного направления

При моделировании прохода вертикальной синусоидальной «просадки» (высота 20 мм, длина 10 м) в отклике кузова фиксируется одиночный пик, затем затухающая серия колебаний, контакт колеса с рельсом сохраняется, коэффициент вертикальной динамики остается в пределах допустимого. Аналогичный характер наблюдается для синусоидальной поперечной «рихтовки», но после затухающего переходного процесса устанавливаются малые гармонические колебания, обусловленные криволинейной траекторией движения колесной пары по гармоническому закону, что соответствует общей теории движения колесной пары с коничностью бандажей. Отклики трех секций сопоставимы по амплитуде и форме, что согласуется с симметрией постановки.

Многовариантный расчет модели с шагом изменения скорости в 1 м/с выявил начало устойчивого роста среднеквадратичных отклонений поперечных перемещений первой колесной пары при 94 км/ч, согласованное с увеличением амплитуд на других колесных парах и в поперечных ускорениях кузова. Полученное значение определяет критическую скорость разработанной модели экипажа, которая превышает конструкционную скорость трамвая «Витязь», и согласуется с реальным экипажем.

Введение спектральных неровностей пути по ПНСТ 511—2020 [13], подбор коэффициента их усиления, а также задание эквивалентных жесткостей и демпфирований подвесок и фрикционных параметров обеспечивают соответствие модели реальным условиям и позволяют адаптировать ее по данным натурного эксперимента.

С целью оценки адекватности модели проведено моделирование движения трамвайного экипажа по прямому участку пути для расчета ускорений кузова в поперечном (Y) и вертикальном (Z) направлениях на скоростях 20, 30, 40, 50 км/ч, соответствующих скоростям в натурном эксперименте. Основная оценка модели выполняется по сравнению сходимости среднеквадратичных значений ускорений кузова (табл.) [5].

Сходимость адаптированной модели

Направление колебаний	Показатель (м/с^2)	Скорость движения, км/ч			
		20	30	40	50
поперечное — y	СКЗ ускорений в эксперименте	0,415	0,576	0,785	1,354
	СКЗ ускорений при моделировании	0,377	0,532	0,821	1,435
	расхождение	9,1 %	7,5 %	4,6 %	6,0 %
вертикальное — z	СКЗ ускорений в эксперименте	1,305	1,818	2,524	4,323
	СКЗ ускорений при моделировании	1,350	1,875	2,491	3,784
	расхождение	3,5 %	3,1 %	1,3 %	12,5 %

Модель сходится с натурными данными не только численно, но и по характеру колебаний: в расчетах воспроизводятся тот же характер колебаний и идентичные частоты, что зафиксированы в эксперименте (рис. 6).

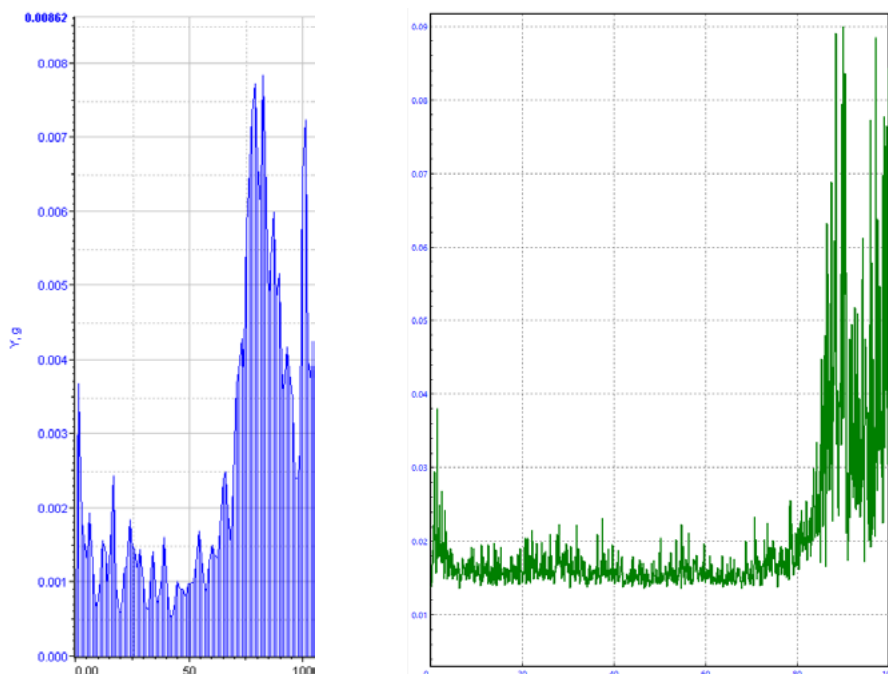


Рис. 6. Частотный характер поперечных колебаний кузова в натурном эксперименте (слева) и в разработанной модели (справа)

Колебания, полученные в натурном эксперименте и рассчитанные с помощью модели, согласуются по форме и положению максимумов, а среднеквадратичные значения ускорений по осям Y и Z различаются не более чем на 12,5 %, что является хорошим результатом для имитационной модели. Такое согласие по форме отклика и по интегральным метрикам подтверждает адекватность принятых допущений и параметров модели для анализа устойчивости и оценки комфорта.

Ключевым параметром, определяющим склонность трамвая к колебаниям виляния, выступает зазор между гребнем колеса и рабочей гранью рельса. Он зависит от ширины колеи и допусков, насадки колес на ось, профилей рельса и колеса и их износа, а также от подуклонки и упругого отжатия нитей под нагрузкой.

В рамках модели увеличение зазора приводит к росту амплитуд поперечных перемещений колесных пар и рамных сил, что согласуется с результатами железнодорожных испытаний [6, 7] и соответствует общим закономерностям динамики экипажей. Влияние зазора в колее на поперечные колебания подтверждается и зарубежными исследованиями [14, 15].

С точки зрения воспроизведения модели значимым фактором оказалось моделирование буксового сферического подшипника с одной дополнительной поступательной степенью свободы по Y (с ограничителями), что уменьшило паразитную связь между колесами оси при вертикальных возмущениях и улучшило соответствие натурному отклику. Вклад фрикционных сил в шкворневых узлах поворотных тележек также критичен, пренебрежение ими занижает запас устойчивости и ускоряет рост поперечных колебаний, тогда как реалистичная модель сухого трения со стадией сцепления стабилизирует поведение экипажа. Эти наблюдения подчеркивают необходимость специализированной модели трамвая, а не прямого переноса железнодорожных параметров.

Ограничения исследования связаны с принятием инерционной, а не упругой модели пути, волновые процессы в рельсовой нити и детальная совместная работа узлов «рельс — скрепление — шпала — балласт» не воспроизводятся. Для задач высокочастотной динамики и акустики, а также для анализа дефектов с короткими волнами требуется переход к упругой модели пути. Отдельной задачей является более точное описание контакта с учетом эволюции профилей колеса и рельса из-за их износа.

Заключение

Разработанная модель взаимодействия трамвайного экипажа и рельсового пути в программном комплексе «Универсальный механизм» адекватна и достаточна для анализа устойчивости движения трамвая и оценки возможностей повышения скоростей движения на прямых участках пути. Модель включает инерционное описание пути, детализированную кинематическую схему экипажа с двумя

ступенями подвешивания, специализированное описание буксового сферического подшипника и фрикционные связи в шкворневых узлах. Верификация подтвердила корректность статических реакций, устойчивость на идеальном пути, симметричный отклик в кривых и реалистичную реакцию на одиночные неровности. Адаптация модели показала хорошую сходимость с натурными данными. Результаты демонстрируют, что учет трамвайной кинематики и эксплуатационного зазора между гребнем и рельсом критичен для обоснования норм (в том числе по ширине колеи и допускам) и допускаемых скоростей. Модель может применяться для подготовки рекомендаций по корректировке норм устройства и содержания трамвайных путей, выбора параметров подуклонки рельсов и оценивания воздействия волнообразного износа рельсов на устойчивость, безопасность и комфортность пассажиров. Предложенные принципы построения модели могут быть применены для других существующих и перспективных трамваев, а текущая модель достаточно легко может быть изменена под родственные трамваи на идентичных тележках.

Список источников

1. Правила технической эксплуатации трамвая. Распоряжение Минтранса России от 30.11.2001 № АН-103-р.
2. СП 98.13330.2018. Трамвайные и троллейбусные линии. СНиП 2.05.09—90 (с Изменениями № 1, 2, 3).
3. СП 119.13330.2024. Железные дороги колеи 1520 мм. СНиП 32-01—95 (с Изменением № 1).
4. СП 2.5.3650—20. Санитарно-эпидемиологические требования к отдельным видам транспорта и объектам транспортной инфраструктуры.
5. Дудкин Е. П. Экспериментальные исследования колебаний трамвая «Витязь-М» / Е. П. Дудкин, Д. В. Козлов, Я. С. Хомяков // Известия Петербургского университета путей сообщения. — СПб.: ПГУПС, 2022. — Т. 19. — Вып. 4. — С. 775–782. — DOI: 10.20295/1815-588X-2022-4-775-782.
6. Рябонович Е. С. Опыт эксплуатации пути с суженой колеей / Е. С. Рябонович. // Метрострой. — 1963. — Вып. 1-2.
7. Савчук О. М. Об интенсивном влиянии тележек / О. М. Савчук, А. В. Шатунов, Н. А. Гричаний // Ж.-д. транспорт (РФ). — 2003. — № 3. — С. 44–45.
8. Певзнер В. О. Унификация ширины колеи на Российских железных дорогах: история и результаты / В. О. Певзнер, И. Б. Петропавловская // Вестник Научно-исследовательского института железнодорожного транспорта. — 2010. — № 2. — С. 15–19.
9. Садиков О. Н. Трамвайные пути: устройство, ремонт и содержание / О. Н. Садиков. — Москва: Транспорт, 1976. — 176 с.

10. Zhai W. Fundamentals of vehicle-track coupled dynamics / W. Zhai, K. Wang, C. Cai // *Vehicle System Dynamics*. — 2009. — Vol. 47. — Iss. 11. — Pp. 1349–1376.
11. Вагон трамвайный модели 71-931М: руководство по эксплуатации / ООО «ПК Транспортные системы». — М., 2017. — 128 с.
12. Универсальный механизм 10: руководство пользователя. Моделирование динамики железнодорожных экипажей / Лаборатория вычислительной механики Брянского государственного технического университета. — 2024. — 277 с.
13. Предварительный национальный стандарт Российской Федерации. ПНСТ 511—2020. Вагоны грузовые. Расчетные неровности железнодорожного пути для оценки показателей динамических качеств грузовых вагонов расчетными методами.
14. Li J. Numerical simulations and experimental analysis of high-speed turnout rails wear models / J. Li, M. Hu, H. Wu, H. Zhong // *Scientific Reports*. — 2025. — Vol. 15. — Iss. 1. — Art. No. 22680. — DOI: 10.1038/s41598-025-08065-4.
15. Polach O. Wheel/rail contact geometry parameters in regard to vehicle behaviour and their alteration with wear / O. Polach, D. Nicklisch // *Wear*. — 2016. — Vol. 366–367. — Pp. 200–208. — DOI: 10.1016/j.wear.2016.03.029.

Дата поступления: 29.10.2025

Решение о публикации: 26.11.2025

Контактная информация:

ДУДКИН Евгений Павлович — д-р техн. наук, проф.; ed@pgups-tempus.ru

ЗАЙЦЕВ Андрей Александрович — доц.; aazaicev@gmail.com

ХОМЯКОВ Ярослав Сергеевич — аспирант, jaro97@mail.ru

Development and Justification of a Mathematical Model for Tram Vibration Analysis

E. P. Dudkin, Ya. S. Khomyakov, A. A. Zaitsev

Emperor Alexander I Saint Petersburg State Transport University, 9, Moskovsky pr., Saint Petersburg, 190031, Russian Federation

For citation: Dudkin E. P., Khomyakov Ya. S., Zaitsev A. A. Development and Justification of a Mathematical Model for Tram Vibration Analysis. *Bulletin of scientific research results*, 2025, iss. 4, pp. 100–116. (In Russian) DOI: 10.20295/2223-9987-2025-4-100-116

Summary

Purpose: To develop and validate a mathematical model that describes the interaction between a multi-section tram and the track, focusing on the analysis of lateral stability (swaying), vertical dynamics, as well as the effects of track parameters, such as gauge, cant, irregularities, and wear due corrugation, on safety and ride comfort. **Methods:** A dynamic simulation of tram motion was conducted using the “Universal Mechanism” software package, which is articulated as a sophisticated mechanical system. This system includes an inertial track model, a comprehensive joint–force scheme for the vehicle, and a nonlinear contact between the wheel

and the rail. **Results:** Verification tests and the adaptation of the model based on data from full-scale field experiments, demonstrating a convergence of vehicle body root-mean-square accelerations within a range of 3% to 12.5%. The results of the study have confirmed the model's appropriateness for establishing standards related to the design and maintenance of tram tracks along straight segments. **Practical significance:** The proposed model can be utilized to justify the choice of track gauge and cant, determine tolerances for deviations in both horizontal and vertical track alignment and profile, set parameters for acceptable rail corrugation, and evaluate permissible speeds given the current conditions of wheels and tracks. The study complements the existing research on vehicle–track interaction in rail transportation by characterizing tram kinematics and presenting a reliable method for the verification and adaptation of the model using empirical data.

Keywords: Tram, wheel–rail, swaying, track gauge, vehicle dynamics, Universal Mechanism.

References

1. *Pravila tekhnicheskoy ekspluatatsii tramvaya. Rasporyazhenie Mintransa Rossii ot 30.11.2001 № AN-103-r* [Tram Operation Rules. Order of the Ministry of Transport of Russia dated November 30, 2001, No. AN-103-r]. (In Russian)
2. *SP 98.13330.2018. Tramvaynye i trolleybusnye linii. SNiP 2.05.09—90 (s Izmeneniyami № 1, 2, 3)* [SP 98.13330.2018. Tram and Trolleybus Lines. SNiP 2.05.09—90 (with Amendments Nos. 1, 2, 3)]. (In Russian)
3. *SP 119.13330.2024. Zheleznnye dorogi kolei 1520 mm. SNiP 32-01—95 (s Izmeneniyami № 1)* [SP 119.13330.2024. 1520 mm Gauge Railways. SNiP 32-01—95 (with Amendment No. 1)]. (In Russian)
4. *SP 2.5.3650—20. Sanitarno-epidemiologicheskie trebovaniya k otdel'nym vidam transporta i ob'ektam transportnoy infrastruktury* [SP 2.5.3650—20. Sanitary and epidemiological requirements for certain types of transport and transport infrastructure facilities]. (In Russian)
5. Dudkin E. P., Kozlov D. V., Khomyakov Ya. S. Eksperimental'nye issledovaniya kolebaniy tramvaya "Vityaz'-M" [Experimental studies of vibrations of the tram "Vityaz'-M"]. *Izvestiya Peterburgskogo universiteta putey soobshcheniya* [Proceedings of Petersburg Transport University]. 2022, vol. 19, Iss. 4, pp. 775–782. DOI: 10.20295/1815-588X-2022-4-775-782. (In Russian)
6. Ryabonovich E. S. Opyt ekspluatatsii puti s suzhenoy koleey [Experience of operating track with narrow gauge]. *Metrostroy* [Metrostroy]. 1963, Iss. 1–2. (In Russian)
7. Savchuk O. M., Shatunov A. V., Grichanyy N. A. Ob intensivnom vilyanii telezhek [On intensive hunting of bogies]. *Zh.-d. transport (RF)* [Railway Transport (RF)]. 2003, Iss. 3, pp. 44–45. (In Russian)
8. Pevzner V. O., Petropavlovskaya I. B. Unifikatsiya shiriny kolei na Rossiyskikh zheleznnykh dorogakh: istoriya i rezul'taty [Unification of track gauge on Russian railways: history and results]. *Vestnik Nauchno-issledovatel'skogo instituta zheleznodorozhnogo transporta* [Bulletin of the Railway Research Institute]. 2010, Iss. 2, pp. 15–19. (In Russian)
9. Sadikov O. N. *Tramvaynye puti: ustroystvo, remont i sodержanie* [Tramway tracks: structure, repair and maintenance]. Moscow: Transport Publ., 1976, 176 p. (In Russian)
10. Zhai W., Wang K., Cai C. Fundamentals of vehicle-track coupled dynamics. *Vehicle System Dynamics*, 2009, vol. 47, Iss. 11, pp. 1349–1376.

11. Vagon tramvaynyy modeli 71-931M: rukovodstvo po ekspluatatsii [Tram car model 71-931M: operation manual]. *ООО “PK Transportnye sistemy”* [LLC “PK Transport Systems”]. Moscow, 2017, 128 p. (In Russian)
12. Universal’nyy mekhanizm 10: rukovodstvo pol’zovatelya. Modelirovanie dinamiki zheleznodorozhnykh ekipazhey [Universal Mechanism 10: user manual. Modelling of railway vehicle dynamics]. *Laboratoriya vychislitel’noy mekhaniki Bryanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Laboratory of Computational Mechanics, Bryansk State Technical University]. 2024, 277 p. (In Russian)
13. *Predvaritel’nyy natsional’nyy standart Rossiyskoy Federatsii. PNST 511—2020. Vagony gruzovye. Raschetnye nerovnosti zheleznodorozhnogo puti dlya otsenki pokazateley dinamicheskikh kachestv gruzovykh vagonov raschetnymi metodami* [Preliminary National Standard of the Russian Federation. PNST 511—2020. Freight cars. Calculated irregularities of railway track for assessing dynamic qualities of freight cars by calculation methods]. (In Russian)
14. Li J., Hu M., Wu H., Zhong H. Numerical simulations and experimental analysis of high-speed turnout rails wear models. *Scientific Reports*, 2025, vol. 15, Iss. 1, Art. No. 22680. DOI: 10.1038/s41598-025-08065-4.
15. Polach O., Nicklisch D. Wheel/rail contact geometry parameters in regard to vehicle behaviour and their alteration with wear. *Wear*, 2016, vol. 366–367, pp. 200–208. DOI: 10.1016/j.wear.2016.03.029.

Received: October 29, 2025

Accepted: November 26, 2025

Author’s information:

Evgeny P. DUDKIN — Dr. Sci. in Engineering, Professor; ed@pgups-tempus.ru

Andrey A. ZAITSEV — Associate Professor; aazaicev@gmail.com

Yaroslav S. KHOMYAKOV — Postgraduate Student; jaro97@mail.ru