УДК 004.942

Компьютерное моделирование динамических систем на фазовой плоскости

Бригаднов Игорь Альбертович[1] — доктор физ.-мат. наук, профессор. Профессор кафедры «Информационные и вычислительные системы». Научные интересы: математическое и компьютерное моделирование, теория принятия решений, численный анализ. E-mail: brigadnov@mail.ru

Морозов Алексей Валентинович[2] — кандидат физ.-мат. наук, профессор. Профессор кафедры высшей математики. Научные интересы: математическое и компьютерное моделирование, численный анализ. E-mail: vka@mil.ru

[1]Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Россия, 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9

[2]Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского, Россия, 197198, Санкт-Петербург, ул. Ждановская, 13

Для цитирования: Бригаднов И. А., Морозов А. В. Компьютерное моделирование динамических систем на фазовой плоскости // Интеллектуальные технологии на транспорте. 2026. № 2 (46). С. 75–81. DOI: 10.20295/2413-2527-2026-246-75-81

Аннотация. *Исследование динамических систем на фазовой плоскости является одним из распространенных методов теории колебаний и широко используется в инженерной и научной практике.* ***Цель:*** *совместить элементы аналитического исследования с компьютерным моделированием.* ***Результаты:*** *предлагается и обсуждается расчетно-графическая работа по дисциплине «Моделирование систем», которая читается в ряде вузов страны.* ***Практическая значимость:*** *изучение динамических систем способствует развитию интеллекта, креативности и формированию профессиональных компетенций, что повышает мотивацию к научно-исследовательской деятельности активной части студентов.*

Ключевые слова: *динамическая система на плоскости, фазовые портреты, аналитически-численное исследование*

2.3.1 — *системный анализ, управление и обработка информации, статистика (технические науки);*
1.2.2 — *математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)*

Введение

На кафедре «Информационные и вычислительные системы» Петербургского государственного университета путей сообщения Императора Александра I традиционно читается курс «Моделирование систем», видное место в котором занимает анализ динамических систем (ДС) как аналитическими, так и численными методами. Студенты знакомятся с различными способами описания ДС, их классификацией, с элементами качественной (геометрической) теории дифференциальных уравнений на плоскости, основными понятиями теории устойчивости, дискретными отображениями и их различными техническими приложениями. Важное место занимает изучение возможных структур фазовых портретов ДС, а также их зависимость от параметров. Данные вопросы составляют содержание теории бифуркаций, отражающей закон перехода количества в качество [1]. Курс предусматривает выполнение студентами расчетно-графической работы (РГР), состоящей из пяти заданий, целью которой является усвоение основных положений теории через анализ геометрических образов. Каждое задание содержит аналитическую часть, основанную на лекциях, и численную, выполненную при помощи открытого отечественного программного продукта WInSet [2]. Результатом РГР является научное исследование, имеющее творческую направленность, поскольку все задания строго индивидуальны.

Линейные динамические системы

В первом задании РГР исследуется автономная линейная ДС с постоянными коэффициентами вида

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy. \end{cases} \tag{1}$$

Анализируя корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0,$$

где $I_1 = a + d$ и $I_2 = ad - bc$ — первый и второй инварианты матрицы ДС, определяется тип единственной стационарной точки, или положения равновесия (0,0), в которой $\dot{x} = \dot{y} = 0$. А именно вычисляются дискриминант $D = I_1^2 - 4I_2$ и корни $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(I_1 \mp \sqrt{D}\right)$ характеристического уравнения.

Далее в соответствии с классификацией Пуанкаре [1] устанавливается, что:

1. При $D \geq 0$ (пара вещественных корней):

- если $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$, тогда точка (0,0) — устойчивый узел;
- если $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$, тогда точка (0,0) — неустойчивый узел;
- если $\lambda_1\lambda_2 < 0$, тогда точка (0,0) — седло.

2. При $D < 0$ (пара комплексно-сопряженных корней):

- если $I_1 < 0$, тогда точка (0,0) — устойчивый фокус;
- если $I_1 > 0$, тогда точка (0,0) — неустойчивый фокус;
- если $I_1 = 0$ (чисто мнимые корни), тогда точка (0,0) — центр.

Далее находятся собственные векторы $\boldsymbol{Z}^{(1)}$ и $\boldsymbol{Z}^{(2)}$ для собственных чисел λ_1 и λ_2 соответственно и записывается аналитическое решение в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} Z_1^{(1)} \\ Z_2^{(1)} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} Z_1^{(2)} \\ Z_2^{(2)} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t},$$

где C_1, C_2 — произвольные константы.

После этого находится уравнение фазовых траекторий в неявном виде $F(x, y) = 0$ путем аналитического решения дифференциального уравнения, порождаемого ДС (1), при помощи стандартной подстановки $y = xz(x)$:

$$y' = \frac{cx + dy}{ax + by}, \quad xz' + z = \frac{c + dz}{a + bz}.$$

Исследование завершается построением фазового портрета ДС (1) (рис. 1).

Нелинейные динамические системы

Во втором задании РГР исследуется автономная нелинейная ДС вида

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases}$$

После нахождения стационарных точек или положений равновесия как корней системы уравнений $\{P(x, y) = 0, Q(x, y) = 0\}$ производится линеаризация ДС в окрестности каждой стационарной точки и определяется ее тип по аналогии с первым заданием. Линеаризация ДС в окрестности какой-либо стационарной точки (x_*, y_*) имеет стандартный вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial P(x_*, y_*)}{\partial x} x + \dfrac{\partial P(x_*, y_*)}{\partial y} y = ax + by \\ \dot{y} = \dfrac{\partial Q(x_*, y_*)}{\partial x} x + \dfrac{\partial Q(x_*, y_*)}{\partial y} y = cx + dy. \end{cases}$$

Исследование завершается построением фазового портрета (рис. 2).

Например, классическое дифференциальное уравнение Дуффинга [3]

$$\ddot{x} + p_1\dot{x} + p_2 x + p_3 x^2 + p_4 x^3 = 0,$$

играющее в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) важную феноменологическую роль, после стандартной замены переменной $y = \dot{x}$ сводится к нелинейной ДС вида

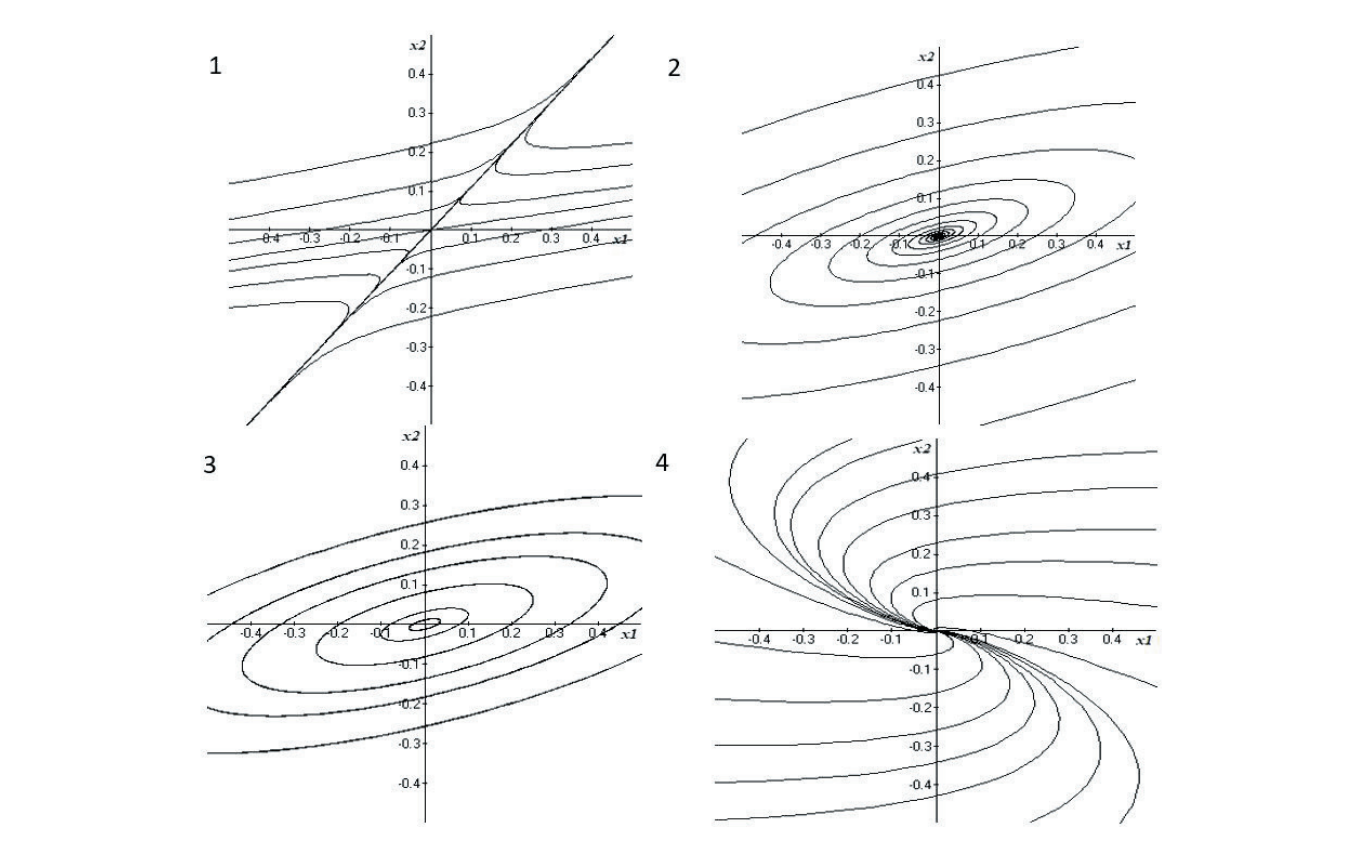

Рис. 1. Некоторые фазовые портреты линейных ДС:
1 — седло; 2 — устойчивый фокус; 3 — центр; 4 — неустойчивый узел

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) = y \\ \dot{y} = Q(x, y) = -p_2 x - p_3 x^2 - p_4 x^3 - p_1 y. \end{cases}$$

Студенты аналитически находят стационарные точки этой ДС, проводят в них линеаризацию и устанавливают типы положений равновесия. Далее в среде WInSet они строят фазовые портреты консервативных при $p_1 = 0$ и диссипативных при $p_1 > 0$ динамических систем (рис. 2).

Бифуркационный анализ динамических систем

В третьем задании РГР студенты исследуют поведение автономной нелинейной ДС с параметром p. Рассмотрим конкретные примеры такого задания.

Пример 1. Аналитически-численное исследование ДС

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^2 \\ \dot{y} = px - x^3 y \end{cases} \quad (2)$$

показывает, что при $p < 0$ в системе имеется три положения равновесия: седло в начале координат и два фокуса (один устойчивый, другой неустойчивый). При $p > 0$ существует одно положение равновесия типа «центр» в начале координат, при этом векторное поле обладает симметрией относительно оси ординат (рис. 3).

Таким образом, при переходе слева направо по оси параметра p через критическое значение $p = 0$ качественно меняется поведение ДС, то есть происходит бифуркация слияния трех стационарных точек в одно положение равновесия типа «центр» в начале координат.

Пример 2. Аналитически-численное исследование более сложной ДС

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x(px^2 + y^2 - 1) \\ \dot{y} = -px - y(px^2 + y^2 - 1) \end{cases} \quad (3)$$

показывает, что единственная стационарная точка (0,0) при $p < -1$ является седлом, при $-1 < p \le 0$ — неустойчивым узлом. При этом фазовые траектории асимптотически ложатся слева

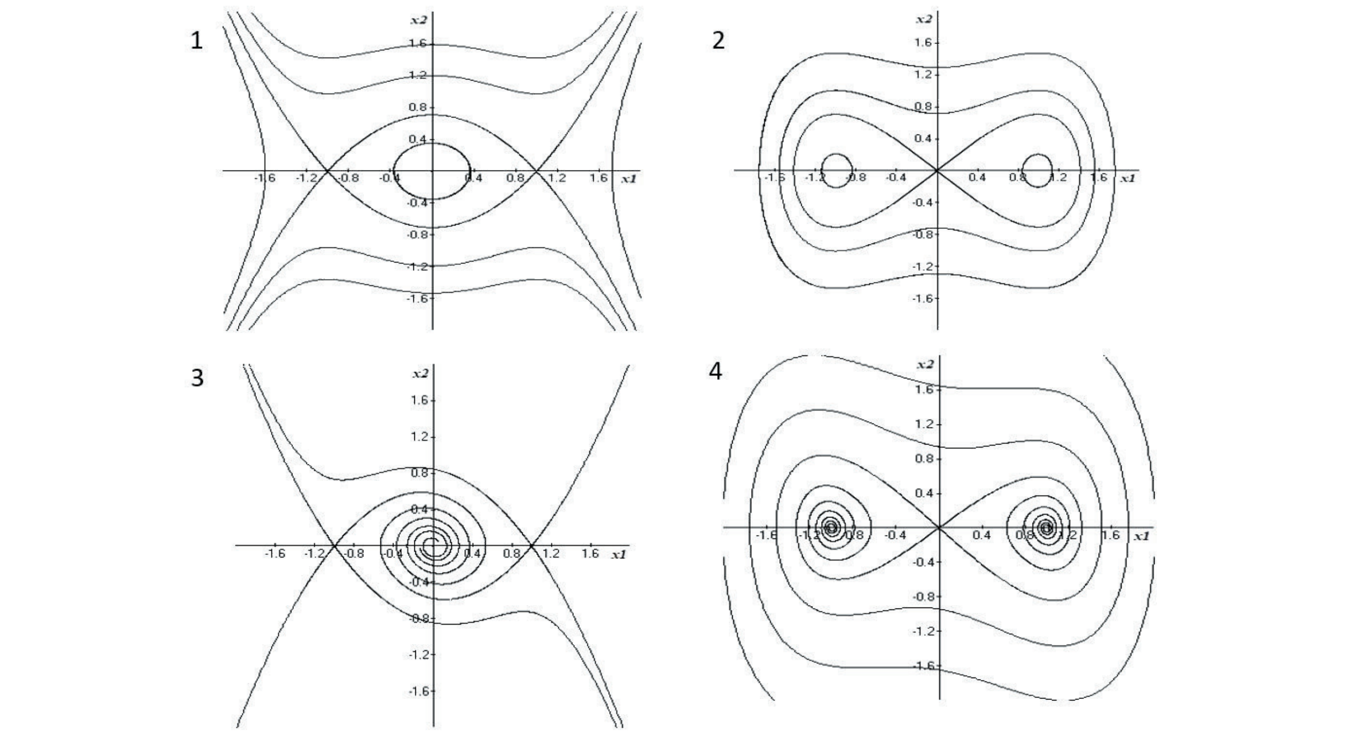

Рис. 2. Фазовые портреты: 1, 2 — консервативные ДС; 3, 4 — диссипативные ДС

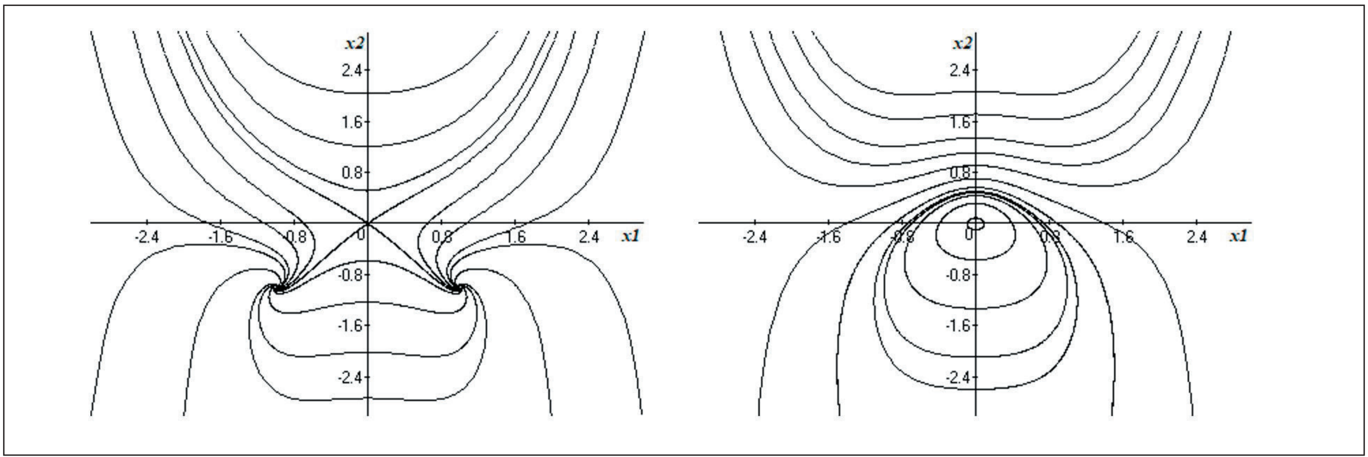

*Рис. 3***.** Фазовые портреты ДС (2) при $p < 0$ (слева) и при $p > 0$ (справа)

на прямую $y = -1$ и справа на прямую $y = 1$. При переходе слева направо по оси параметра p через критическое значение $p = 0$ из пары прямых $y = \pm 1$ рождается предельный цикл — эллипс (рис. 4), что отвечает бифуркации из бесконечности.

Выполнение третьего задания требует изучения дополнительных вопросов, связанных с теорией бифуркаций [4, 5], и здесь основную помощь должен оказать преподаватель.

Аттракторы динамических систем

Четвертое задание РГР является по-настоящему исследовательским и весьма трудоемким, поскольку требует длительной и кропотливой внеаудиторной работы за компьютером. Результатом исследования является карта динамических режимов заданной нелинейной ДС с внешним возбуждением [6].

Для примера рассмотрим неавтономный осциллятор Дуффинга с гармоническим воздействием [7]:

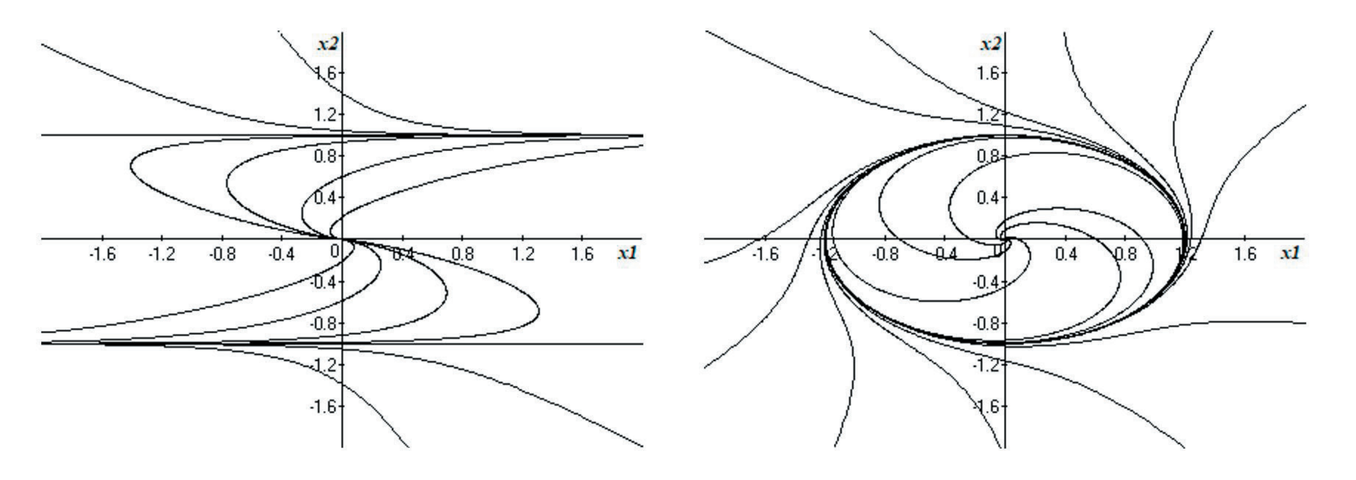

Рис. 4. Фазовые портреты ДС (3) при $p < 0$ (слева) и при $p > 0$ (справа)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\lambda y - x^3 + A\sin(t). \end{cases}$$

В этой ДС существуют как устойчивые колебания различных периодов и амплитуд, так и хаотический режим при возрастании амплитуды гармонического воздействия, что отчетливо наблюдается на фазовой плоскости, а именно: для параметра $\lambda = 0{,}35$ с ростом амплитуды A последовательно происходят бифуркации удвоения периодов [7], переходящие при $A = 6{,}7$ в хаотический режим, или детерминированный хаос [8, 9]. На оси значений параметра A имеются аттракторы — интервалы устойчивого колебания, которые иногда могут перекрываться, что указывает на возможность генерации внешним гармоническим воздействием в этих областях как регулярных колебаний, так и хаотических режимов.

Таким образом, выполнение четвертого задания знакомит студента с современными научно-исследовательскими проблемами, связанными с теорией странных аттракторов и фрактальных структур.

Линейные динамические системы с T-периодическими коэффициентами

В пятом задании исследуется неавтономная линейная ДС (1) с T-периодическими коэффициентами — функциями времени, для которой начало координат является единственной стационарной точкой. Опираясь на теорию Флоке [10], имеющую большое прикладное значение [11, 12], численно находится матрица монодромии

$$M = \begin{pmatrix} x_1(T) & x_2(T) \\ y_1(T) & y_2(T) \end{pmatrix}$$

в результате интегрирования ДС в среде WInSet на одном общем периоде T для двух начальных условий $\{x_1(0) = 1, y_1(0) = 0\}$ и $\{x_2(0) = 0, y_2(0) = 1\}$. После этого находятся собственные числа матрицы монодромии и по величине их модуля определяется устойчивость или неустойчивость стационарной точки (0,0), а именно: если $|\lambda_1| < 1$ и $|\lambda_2| < 1$, тогда начало координат является устойчивым положением равновесия, иначе — нет. Работа завершается построением фазового портрета ДС для 15–20 периодов, экспериментально подтверждая аналитический результат по анализу динамики неавтономной системы.

Заключение

Материал статьи носит научно-методический характер и может использоваться не только в дисциплине «Моделирование систем». Задания являются комплексными и включают элементы качественной теории ОДУ и теории бифуркаций, слабо отраженные в современных учебных программах. Статья преследует цель побудить студентов к получению фундаментальных знаний через компьютерное моделирование, поскольку именно наглядные образы часто являются стимулом к познанию нового. Сегодня необходимо учить не рецептам решения задач, а их исследованию.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Морозов А. В., Бригаднов И. А. Математические основы теории систем: динамические системы. СПб.: Северо-Западный государственный заочный технический университет, 2006. 214 с.
2. Морозов А. Д., Драгунов Т. Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 304 с.
3. Булекбаев Д. А., Морозов А. В. Численное исследование аттракторов в нестационарном уравнении Дуффинга // Перспективы науки. 2024. № 8 (179). С. 32–38.
4. Треногин В. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2009. 312 с.
5. Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. 4-е изд. М.: МЦНМО, 2012. 384 с.
6. Аносов Д. В. Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем. 3-е изд., стер. М.: МЦНМО, 2016. 200 с.
7. Морозов А. В. Качественная теория дифференциальных уравнений — основная составляющая теории динамических систем // Труды Военно-космической академии имени А. Ф. Можайского. 2014. Вып. 642. С. 177–184.
8. Хакен Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / пер. с англ. Ю. А. Данилова; под ред. Ю. Л. Климонтовича. М.: Мир, 1985. 419 с.
9. Ueda Y. Steady Motions Exhibited by Duffing’s Equation: A Picture Book of Regular and Chaotic Motions // New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics / P. J. Holmes (ed.). Philadelphia (PA): Society for Industrial and Applied Mathematics, 1980. Pp. 311–322.
10. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений: учебник. 2-е изд., испр. М.: КомКнига, 2007. 240 с.
11. Montagnier P., Paige C. C., Spiteri R. J. Real Floquet Factors of Linear Time-Periodic Systems // Systems and Control Letters. 2003. Vol. 50, iss. 4. Pp. 251–262. DOI: 10.1016/S0167-6911(03)00158-0
12. Oka T., Kitamura S. Floquet Engineering of Quantum Materials // Annual Review of Condensed Matter Physics. 2019. Vol. 10. Pp. 387–408. DOI: 10.1146/annurev-conmatphys-031218-013423

Дата поступления: 14.04.2026
Решение о публикации: 20.05.2026

Computer Simulation of Dynamic Systems on the Phase Plane

Igor' A. Brigadnov[1] — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Full Professor of the “Information and Computing Systems” Department. Research interests: mathematical and computer modeling, decision theory, numerical analysis. E-mail: brigadnov@mail.ru

Alexey V. Morozov[2] — PhD in Physics and Mathematics, Professor, Full Professor of the Department of Higher Mathematics. Research interests: mathematical and computer modeling, numerical analysis. E-mail: vka@mil.ru

[1] Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, 9 Moskovsky ave., Saint Petersburg, 190031, Russia

[2] Mozhaisky Military Aerospace Academy, 13 Zhdanovskaya str., Saint Petersburg, 197198, Russia

For citation: Brigadnov I.A., Morozov A.V. Computer Simulation of Dynamic Systems on the Phase Plane, *Intellectual Technologies on Transport*, 2026, no. 2 (46), pp. 75–81. DOI: 10.20295/2413-2527-2026-246-75-81 (In Russian)

Abstract. *The study of dynamical systems on the phase plane is one of the common methods of oscillation theory and is widely used in engineering and scientific practice. Purpose: to combine the elements of analytical research with computer modeling.* ***Results:*** *computational and graphical work on the discipline "Systems Modeling" is proposed and discussed, which is taught in a number of universities in the country.* ***Practical significance:*** *the study of dynamic systems contributes to the development of intelligence, creativity and the formation of professional competencies, which increases the motivation for research activities of the active part of students.*

Keywords: *dynamic system on a plane, phase portraits, analytically-numerical study*

REFERENCES

1. Morozov A. V., Brigadnov I. A. Matematicheskie osnovy teorii sistem: dinamicheskie sistemy [Mathematical Foundations of Systems Theory: Dynamical Systems]. Saint Petersburg, North-Western State Correspondence Technical University, 2006, 214 p. (In Russian)

2. Morozov A. D., Dragunov T. N. Vizualizatsiya i analiz invariantnykh mnozhestv dinamicheskikh system [Visualization and Analysis of Invariant Sets of Dynamical Systems]. Moscow, Izhevsk, Institute of Computer Research, 2003, 304 p. (In Russian)

3. Bulekbaev D. A., Morozov A. V. Chislennoe issledovanie attraktorov v nestatsionarnom uravnenii Duffinga [Numerical Study of Attractors in the Non-Stationary Duffing Equation], *Perspektivy nauki [Science Prospects]*, 2024, no. 8 (179), pp. 32–38. (In Russian)

4. Trenogin V. A. Obyknovennye differentsialnye uravneniya [Ordinary Differential Equations], Moscow, Fizmatlit Publishing House, 2009, 312 p. (In Russian)

5. Arnold V. I. Geometricheskie metody v teorii obyknovennykh differentsialnykh uravneniy [Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2012, 384 p. (In Russian)

6. Anosov D. V. Differentsialnye uravneniya: to reshaem, to risuem [Differential Equations: Solving and Drawing]. Moscow, Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2016, 200 p. (In Russian)

7. Morozov A. V. Kachestvennaya teoriya differentsialnykh uravneniy — osnovnaya sostavlyayushchaya teorii dinamicheskikh sistem [Qualitative Theory of Differential Equations as a Basic Component of Dynamic Systems Theory], *Trudy Voenno-kosmicheskoy akademii imeni A. F. Mozhayskogo [Proceedings of the Mozhaisky Military Space Academy]*, 2014, iss. 642, pp. 177–184. (In Russian)

8. Haken H. Sinergetika: ierarkhii neustoychivostey v samoorganizuyushchikhsya sistemakh i ustroystvakh [Advanced Synergetics]. Moscow, Mir Publishers, 1985, 419 p. (In Russian)

9. Ueda Y. Steady Motions Exhibited by Duffing's Equation: A Picture Book of Regular and Chaotic Motions. In: *Holmes P. J. (ed.). New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics*. Philadelphia (PA), Society for Industrial and Applied Mathematics, 1980, pp. 311–322.

10. Filippov A. F. Vvedenie v teoriyu differentsialnykh uravneniy: uchebnik [Introduction to the Theory of Differential Equations: Textbook]. KomKniga Publishing House, 2007, 240 p. (In Russian)

11. Montagnier P., Paige C. C., Spiteri R. J. Real Floquet Factors of Linear Time-Periodic Systems, *Systems and Control Letters*, 2003, vol. 50, iss. 4, pp. 251–262. DOI: 10.1016/S0167-6911(03)00158-0

12. Oka T., Kitamura S. Floquet Engineering of Quantum Materials, *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 2019, vol. 10, pp. 387–408. DOI: 10.1146/annurev-conmatphys-031218-013423

Received: April 14, 2026
Accepted: May 20, 2026